UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID
documentos de trabajo

Documento de Trabajo 07-02
Serie de Economía 01
Febrero 2007

Departamento de Economía
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (España)
Fax (34-91) 6249875

LA MEDICIÓN DE LA DESIGUALDAD DE LA RENTA: UNA REVISIÓN DE LA LITERATURA*

Javier Ruiz-Castillo

Resumen

En esta revisión de la literatura que se ha desarrollado desde los años 70 hasta nuestros días, se estudian los procedimientos que conducen a una ordenación unánime, pero parcial, de las distribuciones de renta; se presentan las familias más importantes de indicadores completos de desigualdad que satisfacen determinadas propiedades básicas, y se investigan las consecuencias de requerir condiciones que ligan la desigualdad global con la desigualdad dentro de los subgrupos de cualquier partición; se discuten las objeciones frente a todos y cada uno de los juicios de valor que constituyen el paradigma de medición de la desigualdad presentado en los dos apartados precedentes; se estudian las formas en que se ha abordado la heterogeneidad entre los individuos que surgen cuando se agrupan en hogares con distintas necesidades o cuando sus rentas difieren por haber contado con diferentes oportunidades de las que no son moralmente responsables, y se formulan algunas conclusiones.

* Este trabajo se ha realizado con el apoyo del Proyecto SEJ2004-01959 financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia.

INTRODUCCIÓN

En cualquier ciencia, no hay medición sin teoría. Al menos, medición interesante. Y, en ciencias sociales, no hay medición de conceptos polisémicos, como la desigualdad, sin juicios de valor. El tratamiento moderno de la interacción entre axiomas y procedimientos empíricos de medición de este fenómeno con datos microeconómicos arranca hacia 1970 con los trabajos de Kolm (1966, 1976a, 1976b), Atkinson (1970) y Sen (1973). La aceptación de ciertos juicios de valor, junto a la adopción de determinadas convenciones para solucionar los problemas que los datos presentan en la práctica, han dado lugar durante los últimos 30 años a la consolidación de un paradigma bien asentado dentro del cual han proliferado centenares de estudios que evalúan la desigualdad en un país a lo largo del tiempo o establecen comparaciones internacionales de desigualdad en un momento dado.[1] Este capítulo se dedica a revisar los fundamentos de los procedimientos empíricos existentes para determinar cuando una distribución de renta puede considerarse razonablemente más desigual que otra[2].

El modelo en que se basa la medición moderna de la desigualdad se refiere a un caso ideal en que hay que distribuir una cierta cantidad de una variable unidimensional, que denominamos renta, entre un conjunto finito de individuos con idénticas características. En esas condiciones simplificadas, las diferencias de renta entre dos individuos expresan directamente las diferencias entre su bienestar económico respectivo. El problema que hay que resolver es que la comparación de distribuciones de renta desde el punto de vista de la desigualdad depende típicamente de la posición política del evaluador. La razón es que la evaluación de este fenómeno es un ejercicio normativo en el que entran en juego necesariamente juicios de valor contrapuestos.

En esta situación, una forma natural de evitar ambigüedades es exigir que para declarar socialmente que una distribución de renta tiene más desigualdad que otra es necesario el acuerdo unánime de todos los indicadores de desigualdad que satisfagan un conjunto de propiedades básicas. Necesitamos también un procedimiento operativo para determinar empíricamente cuando existe tal acuerdo en aplicaciones prácticas. Así, una pieza fundamental del esquema diseñado por los

[1] Para apreciar las dimensiones de la literatura existente basta acercarse a las comparaciones internacionales revisadas recientemente por Gottschalk y Smeeding (1997, 2000), así como a la primera estimación de la desigualdad en el mundo con datos micro en Milanovic (2002).

[2] La medición de conceptos afines de interés para la economía y otras ciencias sociales –como la pobreza, el bienestar o la movilidad sociales, la segregación o la polarización– sigue pautas metodológicamente comparables.

economistas en este campo consiste en la identificación de los juicios de valor que justifican la ordenación de las distribuciones de renta a través de la comparación de sus curvas de Lorenz.

El coste de este enfoque es que sólo proporciona una ordenación parcial en el espacio de las distribuciones de renta. Además, a menudo estamos interesados no sólo en dirimir si una distribución tiene más desigualdad que otra, sino en establecer en qué porcentaje la desigualdad de una distribución es mayor que la de otra de otra. Existen numerosos indicadores que proporcionan una ordenación completa de todas las distribuciones concebibles, permiten esas comparaciones cardinales y, además, son admisibles en el sentido de que satisfacen las propiedades básicas mencionadas en el párrafo anterior. Un camino para seleccionar entre ellos es introducir otras propiedades que hayan sido útiles en el trabajo empírico. En particular, frecuentemente deseamos cuantificar qué parte de la desigualdad global entre los individuos puede atribuirse a factores demográficos (como la edad o el sexo), socioeconómicos (como la educación o la ocupación) o geográficos (como la región o la densidad de población del municipio de residencia). Pues bien, si junto a los axiomas básicos se requiere alguna versión de la propiedad de descomponibilidad que permite este tipo de ejercicios, nos vemos abocados a una sola familia de indicadores conocida como la familia de índices de desigualdad de entropía generalizada.

Así pues, contamos con resultados teóricos sobre los que basar la medición de la desigualdad. Por un lado, sabemos como verificar si dos distribuciones de renta pueden ordenarse de acuerdo con un criterio unánime, libre de ambigüedades, que desemboca en el criterio de Lorenz. Por otro, en ausencia de comparabilidad según el enfoque anterior y/o si estamos interesados en cuantificaciones ulteriores, conocemos las propiedades que caracterizan indicadores completos útiles para ello.

Sin embargo, el edificio anterior se enfrenta con dificultades de dos tipos. En primer lugar, los resultados son tan razonables como los supuestos sobre los que se sustentan. Como veremos, ni siquiera las propiedades que hemos denominado básicas están exentas de crítica. En segundo lugar, en la aplicación del modelo teórico a los datos reales se plantean toda suerte de complicaciones. Algunas tienen que ver con las limitaciones de los datos para aproximar la variable renta, mientras que otras se derivan del carácter muestral de la información disponible. Sin embargo, la mayor dificultad es que los individuos que encontramos en la realidad, lejos de ser homogéneos, difieren en distintas características que se consideran moralmente relevantes en la evaluación de las distribuciones de renta.

Entre las diversas fuentes de heterogeneidad que nos obligan a abandonar el modelo inicial, aquí se discutirán solamente las dos siguientes. Primero, los individuos viven en hogares de distinto tamaño y composición, por lo que habrá que reconocer que tienen distintas "necesidades" –y, por tanto, distintos derechos sobre la renta total. Segundo, recientemente se ha destacado la necesidad de distinguir entre los determinantes de las rentas que están bajo la responsabilidad de los individuos y los que están fuera de su control. Desde esta perspectiva, las únicas diferencias de renta socialmente preocupantes son las atribuibles a las diferencias en estas últimas, entre los que se encuentra la condición socioeconómica de los padres, el sexo, la etnia o el resto de la herencia genética.

El trabajo se organiza en 5 apartados. El primero se dedica a los procedimientos que conducen a una ordenación unánime, pero parcial, de las distribuciones de renta. El segundo apartado tiene dos objetivos: presentar las familias más importantes de indicadores completos de desigualdad que satisfacen las propiedades básicas, y estudiar las consecuencias de requerir condiciones que ligan la desigualdad global con la desigualdad dentro de los subgrupos de cualquier partición. El tercer apartado discute las objeciones frente a todos y cada uno de los juicios de valor que constituyen el paradigma de medición de la desigualdad presentado en los dos apartados precedentes. En el cuarto apartado se estudian las formas en que se ha abordado la heterogeneidad entre los individuos que surgen cuando se agrupan en hogares con distintas necesidades o cuando sus rentas difieren por haber contado con diferentes oportunidades de las que no son moralmente responsables. Finalmente, el quinto apartado contiene algunas conclusiones.

I. LA ORDENACIÓN PARCIAL DE DISTRIBUCIONES DE RENTA

I. 1. Preliminares

Hasta nuevo aviso, vamos a estudiar el problema distributivo más sencillo posible. Se trata de distribuir una cantidad dada de una variable unidimensional infinitamente divisible entre una población que consiste en un número finito de *individuos*. Por sencillez, esa variable, que se supone que representa adecuadamente el bienestar o la posición económica de los individuos, se denominará por el término *renta*. Los individuos son *homogéneos* en el sentido de que son idénticos en todas las dimensiones moralmente relevantes distintas de la renta. Una *distribución de renta* (DR) es un vector $\mathbf{x} = (x_1,\dots, x_n)$ de cantidades no negativas, donde x_i es la renta que percibe el individuo i y n es el número de individuos de la población. De aquí en adelante, dada una distribución $\mathbf{x}$, denominaremos por $x^* = (x_1^*,\dots, x_n^*)$ la permutación de esa distribución (cuando sea necesaria) en que las rentas están ordenadas de menor a mayor, es decir, $x_1^* \leq \dots \leq x_n^*$.

Una *medida*, un *índice* o un *indicador de desigualdad* (ID) es una función continua I con dominio D y rango formado por los números reales no negativos, R_+. Para referirnos a poblaciones de distinto tamaño, en general tomaremos $D = \cup_n D^n$, donde $D^n = \{\mathbf{x} \in R^n: \Sigma_i x_i > 0, x_i \geq 0$ para todo $i\}$. En ocasiones el dominio estará formado por el conjunto $D_+ = \{\mathbf{x} \in D: x_i > 0$ para todo $i\}$. Dadas dos distribuciones $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$, las expresiones $I(\mathbf{x}) > I(\mathbf{y})$; $I(\mathbf{x}) \geq I(\mathbf{y})$, e $I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{y})$, significan, respectivamente, que la distribución $\mathbf{x}$ tiene más; al menos la misma, o igual desigualdad que la distribución $\mathbf{y}$. Dado que los individuos son homogéneos y, por tanto, todos tienen los mismos derechos sobre la renta total disponible, la desigualdad se mide en referencia a la distribución igualitaria en la que todos reciben la renta media, $\mu(\mathbf{x}) = (1/n)\Sigma_i x_i$. En consecuencia, de aquí en adelante supondremos que todos los ID son susceptibles de la siguiente normalización: si $\mathbf{x} \in D$ es la distribución igualitaria, entonces $I(\mathbf{x}) = 0$; en otro caso, $I(\mathbf{x}) > 0$.

Como se indicó en la Introducción, el problema que hay que afrontar es que las conclusiones sobre las repercusiones distributivas de cualquier medida de política económica pueden diferir dependiendo de la posición política del evaluador. La razón es que la medición de la desigualdad es un ejercicio normativo que entraña juicios de valor potencialmente contrapuestos. Así, eligiendo diferentes medidas de desigualdad -todas las cuales parecerían a primera vista buenas y aceptables-, es posible tomar cualquier país y demostrar que la desigualdad ha aumentado o disminuido en el tiempo, o tomar cualquier par de países y demostrar que la desigualdad es mayor en uno que en otro (Kolm, 1976a, p. 416).

Hay dos maneras de confrontar esta situación tan embarazosa. En primer lugar, supongamos que existe un criterio generalmente aceptado para ordenar al menos ciertas DR. Entonces podríamos preguntarnos por la clase de indicadores consistente con esa ordenación parcial; es decir, podríamos investigar las propiedades que debe satisfacer un ID para coincidir con ese criterio inicial en el conjunto de distribuciones citado. En segundo lugar, podríamos buscar un acuerdo general sobre las propiedades básicas que debería satisfacer cualquier ID para ser considerado admisible. Como sabemos, distintos ID admisibles diferirán ante ciertas comparaciones; sin embargo, podríamos investigar el conjunto de DR que se ordenan del mismo modo por todos los ID admisibles. A renglón seguido podríamos averiguar si hay alguna forma operativa de revelar esas ordenaciones unánimes con datos reales. Como veremos seguidamente los dos caminos conducen a la misma solución[3].

I. 2. El criterio de dominancia de Lorenz

[3] Las páginas siguientes siguen de cerca la discusión de Foster (1985).

Una forma popular de comparar informalmente dos DR desde el punto de vista de su desigualdad comienza por ordenarlas de menor a mayor. A continuación se divide la población en subgrupos de igual tamaño, por ejemplo en cuartiles cada uno de los cuales contiene el 25% de la población. Finalmente, se calcula la proporción de la renta total que poseen esos subgrupos. En el caso de una DR en que cada subgrupo percibiera exactamente la misma renta, las proporciones de renta acumuladas sucesivamente por los 4 cuartiles serían precisamente (25%, 50%, 75%, 100%). Supongamos que para dos distribuciones **x**, $\mathbf{y} \in D^n$, las proporciones de renta acumuladas sucesivamente por los 4 cuartiles de la población son (3%, 18%, 48%, 100%) y (2%, 15%, 42%, 100%), respectivamente. En la medida en que las proporciones de renta atribuibles al 25%, 50% y 75% de la población en la distribución **x** son siempre mayores que las de la distribución **y**, diríamos que la primera exhibe menos desigualdad que la segunda. Cuando no hay dominancia uniforme de una distribución sobre la otra –como en el caso (3%, 18%, 48%, 100%) y (2%, 15%, 50%, 100%)– no es posible ordenar las distribuciones en cuestión con arreglo a este criterio.

Este procedimiento es fácil de llevar a la práctica y proporciona una primera aproximación a la comparación de DR desde el punto de vista de la desigualdad. Su mayor limitación es que ignora las posibles diferencias de renta que existan dentro de cada cuartil de la población. Una forma natural de solventar este defecto es utilizar el criterio de Lorenz, que data de 1905. La *curva de Lorenz* asociada a una distribución $\mathbf{x} \in D$, $L_{\mathbf{x}}$, relaciona la proporción de la renta total acumulada en la distribución $\mathbf{x}^*$ a medida que consideramos una proporción *p* cada vez mayor de la población; es decir, la curva de Lorenz indica la proporción $L_{\mathbf{x}}(p)$ de la renta total acumulada por el *p x 100* más pobre de la población a medida que *p* varía entre 0 y 1. Si todas las rentas son iguales, el *p x 100* más pobre de la población recibe exactamente el *p x 100* de la renta total para todo *p*. En ese caso, la representación gráfica de la curva de Lorenz coincidirá con la diagonal del cuadrado de lados iguales a [0, 1]. En cambio, la curva de Lorenz de cualquier otra DR estará representada por una curva que estará siempre por debajo de la diagonal, reflejando el hecho de que, para todo *p*, al *p x 100* más pobre de la población le corresponde menos del *p x 100* de la renta total.

Dadas **x**, $\mathbf{y} \in D$, se dice formalmente que **x** *domina en el sentido de Lorenz* a **y** si $L_{\mathbf{x}}(p) \geq L_{\mathbf{y}}(p)$ para todo $p \in [0, 1]$, con desigualdad estricta para algún *p*; en ese caso, escribimos $L_{\mathbf{x}} >_L L_{\mathbf{y}}$ e interpretamos que **x** tiene menos desigualdad que **y**. Si las curvas de Lorenz de dos distribuciones **x**, $\mathbf{y} \in D$ se cortan una o más veces, se dice que **x** e **y** son *no comparables en el sentido de Lorenz*, en cuyo caso escribimos $L_{\mathbf{x}} \sim_L L_{\mathbf{y}}$.

El criterio de Lorenz retiene el atractivo intuitivo del criterio de los cuantiles. Pero recibe el espaldarazo definitivo cuando se añade el siguiente argumento. Dada una distribución $\mathbf{x} \in D$, decimos que se ha producido una *transferencia progresiva* cuando un individuo cede una cantidad positiva de su renta a otro individuo más pobre (o de igual renta). El siguiente resultado, que se debe a Hardy *et al.* (1934), se introdujo en la literatura económica de la desigualdad por Kolm (1966) y Atkinson (1970):

<u>Teorema 1</u>. Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^n$ tales que $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{y})$. Entonces $L_{\mathbf{x}} >_L L_{\mathbf{y}} \Leftrightarrow \mathbf{x}^*$ se obtiene a partir de $\mathbf{y}^*$ a través de una secuencia de permutaciones y/o transferencias progresivas.

Para muchos, la obtención de una distribución a partir de otra a través de una secuencia de transferencias progresivas es señal inequívoca de que se ha producido un descenso de la desigualdad (véase la crítica a esta posición en el apartado III.1). Pues bien, el T1 nos garantiza que la comparación de distribuciones con la misma media y la misma población a través de sus curvas de Lorenz es equivalente a esa operación. La operatividad empírica del criterio de Lorenz y su contenido intuitivo original, reforzado por la justificación normativa que ofrece el T1, explican por qué la profesión económica considera mayoritariamente la dominancia de Lorenz como el procedimiento empírico por excelencia para obtener una ordenación parcial de aceptación general.

I. 3. La clase de índices de desigualdad admisibles

El siguiente paso consiste en averiguar qué clase de ID proporcionan la misma ordenación que el criterio de Lorenz. A esos efectos, se dice que un ID $I: D \rightarrow R_+$ es *consistente con el criterio de Lorenz* sí y sólo sí para todo par de distribuciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$ tales que $L_{\mathbf{x}} >_L L_{\mathbf{y}}$, tenemos que $I(\mathbf{x}) < I(\mathbf{y})$. Para determinar la clase de indicadores consistente con este criterio, es preciso introducir las 4 propiedades siguientes.

1. En la medida que todos los individuos son idénticos, es enteramente natural requerir que en la medición de la desigualdad la identidad de los individuos es irrelevante. En otros términos, la desigualdad debe ser invariante ante intercambios de las posiciones de los individuos. Formalmente, un ID debe satisfacer la siguiente propiedad de simetría (o anonimidad).

<u>Simetría</u> (**S**). Si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^n$ sólo se diferencian en que una distribución es una permutación de la otra, entonces $I(\mathbf{x}) = I(\mathbf{y})$.

2. Siguiendo una sugerencia de Pigou (1912), Dalton (1920) fue el primero en formalizar la idea central ya comentada anteriormente de que una transferencia progresiva reduce inequívocamente la desigualdad[4]. Formalmente:

[4] En la definición de transferencia progresiva se exige a veces que la operación no altere la ordenación original de los dos individuos directamente implicados. En presencia de la propiedad de simetría, las distintas definiciones son equivalentes.

Principio de las Transferencias de Pigou-Dalton (**PT**). Si **x**, **y**$\in D^n$ son tales que **x** se obtiene a partir de **y** a través de una transferencia progresiva, entonces I(**x**) < I(**y**).

3. Las dos propiedades anteriores[5] restringen los ID sólo en comparaciones de distribuciones para poblaciones con el mismo número de individuos. Es muy útil contar con un axioma que delimite qué comparaciones son posibles cuando las dos DR objeto de estudio se refieren a poblaciones de distinto tamaño. El propio Dalton (1920) sugirió una manera muy operativa de hacer tales comparaciones postulando que lo que importa en la medición de la desigualdad no es el número absoluto sino el porcentaje de individuos con un nivel de renta dado. Para hacer precisa esta idea necesitamos el concepto siguiente. Se dice que **y** es una *réplica* de **x**$\in$ D si para $m \geq 2$ tenemos que $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(1)},\ldots, \mathbf{y}^{(m)})$ donde $\mathbf{y}^{(j)} = \mathbf{x}$ para todo j = 1,…, m. Como la réplica de una distribución deja constante el porcentaje de individuos con las rentas originales, la desigualdad debe permanecer invariable ante esta operación (para una crítica de esta visión véase el apartado III.2). Formalmente:

Principio de Población de Dalton (**PP**). Si **y** es una réplica de **x**, entonces I(**y**) = I(**x**).

La utilidad del **PP** se pone de manifiesto en el siguiente ejemplo. Supongamos que se desea comparar las distribuciones $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ que se refieren a distribuciones de distinto tamaño. Repliquemos **x** 3 veces (el tamaño de la población de **y**) e **y** 2 veces (el tamaño de la población de **x**), de manera que $\mathbf{x}\# = (x_1, x_2, x_1, x_2, x_1, x_2)$ e $\mathbf{y}\# = (y_1, y_2, y_3, y_1, y_2, y_3)$, respectivamente. El **PP** nos permite concluir que I(**x**#) = I(**x**) e I(**y**#) = I(**y**), de forma que el problema inicial de comparar **x** e **y** se reduce a la comparación entre **x**# e **y**# cuyas poblaciones tienen el mismo tamaño.

4. Las propiedades anteriores restringen las comparaciones de DR ante permutaciones, transferencias y réplicas que no alteran la media. Para poder comparar DR con distinta media, es necesario introducir otros juicios de valor sobre la forma en que la desigualdad varía cuando lo hacen todas las rentas individuales. La visión predominante en la literatura es que cuando las rentas cambian simultáneamente en la misma proporción la desigualdad permanece constante. En otras palabras, en la medición de la desigualdad lo único que importa son las rentas relativas de los individuos (véase la crítica de esta posición en el apartado III.3).

[5] Las propiedades **S** y **PT** son equivalentes a cierta noción de convexidad, la convexidad de Schur o S-convexidad. Se dice que una matriz (n x n) es *bioestocástica* cuando sus elementos son no-negativos y la suma de todas sus filas y columnas es igual a 1. Se dice que un ID es *S-convexo* cuando para todo **x**$\in D^n$ y toda matriz bioestocástica **B**, I(**Bx**) ≤ I(**x**). Un ID es *estricamente S-convexo* cuando tenemos estricta desigualdad siempre que **Bx** no sea una permutación. Para la *S-concavidad* y la *estricta S-concavidad*, las desigualdades cambian de dirección.

Independencia de la Escala (**IE**). Para todo par de distribuciones **x**, **y**$\in D^n$ tales que **x** = λ**y** con $\lambda > 0$, I(**x**) = I(**y**).

Aceptemos que estos 4 axiomas constituyen las propiedades básicas que cualquier ID debe satisfacer, y denotemos por Φ la clase de índices de desigualdad *admisibles* que cumplen las propiedades **S**, **PT**, **PP** e **IE**. El resultado siguiente, debido a Foster (1985), marca el fin del camino emprendido en las páginas anteriores.

Teorema 2. Una medida de desigualdad I: D $\rightarrow R_+$ es consistente con el criterio de Lorenz si y sólo si I$\in\Phi$, esto es, si y sólo si satisface las cuatro propiedades **S**, **PT**, **PP** e **IE**.

Así pues, la clase de ID consistentes con el criterio de Lorenz coincide con la clase Φ de índices admisibles. Por consiguiente, en la práctica es inmediato determinar si una distribución tiene menos desigualdad que otra de acuerdo con todos los ID admisibles: basta comparar sus curvas de Lorenz.

Hemos partido de una ordenación parcial de DR según la cual que **x** domine a **y** en el sentido de Lorenz significa que **x** puede obtenerse a partir de **y** a través de una secuencia de transferencias progresivas, razón por la cual se acepta que digamos que **x** tiene menos desigualdad que **y**. Por otra parte, se han presentado 4 propiedades básicas de los ID que definen lo que muchos entienden que constituye la clase de indicadores admisibles. Tales índices divergirán en la ordenación de determinadas distribuciones de renta, pero ordenarán del mismo modo algún subconjunto de ellas. Pues bien, el T2 indica que la ordenación parcial en que concurren unánimemente los índices de desigualdad admisibles coincide con la ordenación parcial que se obtiene con el criterio de Lorenz. Como corolario al T2 podemos afirmar que, para cada par de distribuciones **x**, **y**$\in$D tales que $L_{\mathbf{x}} >_L L_{\mathbf{y}}$, tenemos que I(**x**) < I(**y**) para todo I$\in\Phi$. Cuando éste es el caso, el T2 indica que, una vez realizadas las réplicas y los cambios de escala oportunos, para convertir la segunda distribución en la primera sólo se requieren permutaciones y/o transferencias progresivas.

A título de ejemplo, supongamos que se desea comparar las distribuciones **x** = (1, 7) e **y** = (12, 6, 6) que se refieren a distribuciones de distinto tamaño. Repliquemos **x** 3 veces e **y** 2 veces, de manera que **x#** = (1, 7, 1, 7, 1, 7), **y#** = (12, 6, 6, 12, 6, 6) y la población de ambas réplicas sea del mismo tamaño. El **PP** nos permite concluir que I(**x#**) = I(**x**) e I(**y#**) = I(**y**). Si multiplicamos por 2 todas las rentas de **x#**, de manera que **x'** = (2, 14, 2, 14, 2, 14), la propiedad **IE** indica que I(**x'**) = I(**x#**). Si permutamos **x'** e **y#** para obtener **x''** = (2, 2, 2, 14, 14, 14) e **y'** = (6, 6, 6, 6, 12, 12), respectivamente, la condición **S** garantiza que I(**x''**) = I(**x'**) e I(**y'**) = I(**y#**). Por otra parte, en la medida que **y**’ puede obtenerse de **x**” a través de 6 transferencias progresivas, el **PT** indica que I(**x**”) > I(**y**’). Así pues, I(**x**) > I(**y**).

Por el contrario, cuando las curvas de Lorenz de dos distribuciones **z** y **v** tienen alguna intersección, aún después de asegurar que tengan la misma media y se refieran a la misma población es imposible obtener la una de la otra a través de una secuencia de transferencias progresivas; será necesario efectuar también alguna transferencia regresiva. Por su parte, siempre será posible encontrar dos índices admisibles, I_1 e I_2, tales que $I_1(\mathbf{z}) > I_1(\mathbf{v})$ e $I_2(\mathbf{z}) < I_2(\mathbf{v})$[6].

II. LA ORDENACIÓN COMPLETA DE DISTRIBUCIONES DE RENTA

La mayor limitación del enfoque de la dominancia presentado en el apartado anterior es que sólo proporciona una ordenación parcial de todas las distribuciones concebibles. Si deseamos ordenaciones completas, parece natural moverse dentro de la clase de ID admisibles. El problema es que esta clase es extraordinariamente amplia. En este apartado, comenzaremos por describir algunas familias de ID admisibles que se utilizan frecuentemente en la práctica. Nos referimos a (i) la familia de índices de Atkinson, que se obtienen explícitamente a partir de una función de bienestar social determinada; (ii) la familia de índices de Gini, cuyo miembro original está íntimamente ligado a la representación de distribuciones de renta a través de curvas de Lorenz, y (iii) los índices que arrancan la noción de entropía utilizada en la teoría de la información. En segundo lugar, revisaremos los juicios de valor que se han propuesto para seleccionar, dentro de los ID admisibles, aquellos que son recomendables por otros conceptos.

II.1. Tres tipos de ID

1. Una *función de bienestar social* (FBS), o de *evaluación social*, es una función W con dominio en D y rango en los números reales R, W: D → R, donde W(**x**) se interpreta como el bienestar que se atribuye socialmente a **x**. En la medida que todos los juicios de valor que se consideren socialmente aceptables en un determinado contexto se formulan explícitamente como propiedades de una FBS, es indudablemente interesante basar la medición de la desigualdad en ID congruentes con esa FBS en el sentido de que, para cada par de DR con la misma media, la más igualitaria es la que proporciona

[6] El planteamiento detrás de los resultados anteriores se aplica también cuando las curvas de Lorenz de dos distribuciones tienen una sola intersección. Para ello es necesario introducir un nuevo juicio de valor, según el cual valoramos más el impacto de una transferencia progresiva cuando los individuos involucrados tienen rentas más bajas que cuando las tienen más altas. Para los detalles técnicos que no es posible cubrir aquí, puede verse Foster y Shorrocks (1987) y la revisión reciente de esta literatura en Moyes (1999), donde se incluyen también los resultados referentes a la llamada dominancia estocástica de segundo y tercer orden.

mayor bienestar social. Formalmente, dada una FBS *W* se dice que el ID *I* es *normativamente significativo respecto de W* si para todo par de distribuciones $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$ tales que $\mu(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{y})$, tenemos que $I(\mathbf{x}) \leq I(\mathbf{y})$ si y sólo si $W(\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{y})$. En ese caso se dice también que *I* es un índice *ético* o *normativo* de desigualdad.

El enfoque ético o normativo a la medición de la desigualdad se inicia con los trabajos de Kolm (1966, 1976a, 1976b), Atkinson (1970) y Sen (1973) –véase la revisión reciente de la literatura de Blackorby *et al.* (1999) y las referencias allí citadas. El concepto clave de este enfoque es el siguiente. Dada una FBS *W* y dada una DR $\mathbf{x} \in D^n$, la *renta equivalente igualmente distribuida* (REID) es la renta $\zeta(\mathbf{x})$ que si se asigna a cada individuo conduce a una distribución socialmente equivalente a $\mathbf{x}$. De esta manera, la función $\zeta: D^n \rightarrow R$ se define implícitamente por la condición

$$W(\zeta(\mathbf{x}),\ldots, \zeta(\mathbf{x})) = W(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D^n.$$

Esta función[7] constituye una representación de W en el sentido de que, para cada par $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D^n$, $\zeta(\mathbf{x}) \geq \zeta(\mathbf{y})$ si y sólo si $W(\mathbf{x}) \geq W(\mathbf{y})$.

¿Cómo obtener ID normativamente significativos a partir de una FBS concreta? Una primera respuesta se encuentra en los trabajos citados de Kolm, Atkinson y Sen. Dada una FBS *W*, el *índice de desigualdad de Atkinson, Kolm y Sen*, I^{AKS}, se define por:

$$I^{AKS}(\mathbf{x}) = (\mu(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}))/\mu(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D_+^{\,n}. \tag{1}$$

En la medida en que

$$\zeta(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x})\, [1 - I^{AKS}(\mathbf{x})]$$

y que $\zeta(\mathbf{x})$ es una representación de *W*, es evidente que el I^{AKS} es un ID normativamente significativo respecto de W. Es importante observar que el I^{AKS} tiene una interpretación cardinal, pues para cada DR proporciona el porcentaje de la renta total del que puede prescindirse, manteniendo el mismo nivel de bienestar social, si la cantidad restante de renta fuera distribuida igualitariamente[8]. Cuando $\mathbf{x}$ es la distribución igualitaria en que cada individuo percibe la renta media, $\mu(\mathbf{x})$, la REID $\zeta(\mathbf{x})$ coincide con la media y $I^{AKS}(\mathbf{x}) = 0$. Cuando $\zeta(\mathbf{x}) = 0$, $I^{AKS}(\mathbf{x})$ toma su máximo valor igual a la unidad.

[7] La existencia y unicidad de la REID está garantizada en las siguientes condiciones que de aquí en adelante supondremos que se satisfacen siempre. Si *W* es continua y creciente en todos sus argumentos, entonces para cada $\mathbf{x} \in D^n$ existe una única REID y la función $\zeta: D^n \rightarrow R$ es continua y creciente.

[8] Es fácil demostrar que existen otros ID normativamente significativos respecto de la misma FBS que divergen del I^{AKS}. Para las condiciones bajo las cuales el enfoque normativo es compatible con un concepto meramente ordinal de la desigualdad puede verse Dutta y Esteban (1992).

¿Qué otras propiedades de *W* nos aseguran que el I^{AKS} es un ID admisible? En primer lugar, si *W* es S-cóncava, entonces la función ζ es también S-cóncava y, por tanto, el I^{AKS} es S-convexo, por lo que en virtud de la nota 4 concluimos que posee las propiedades **S** y **PT** (véase la nota 5 para una definición de S-concavidad y S-convexidad). En segundo lugar, si el bienestar social se mantiene constante ante réplicas de la población, entonces el I^{AKS} satisface el **PP** de Dalton. Finalmente, si *W* es homotética, entonces ζ es homogénea de grado uno y el I^{AKS} es **IE**.

El I^{AKS} más famoso es el que se deriva de una FBS que es una media de orden *r*. Se trata de la familia de *índices de Atkinson* que, para cada $\mathbf{x} \in D_+^n$, se define por:

$$I_r^A(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - (1/\mu(\mathbf{x}))\,[(1/n)\,\Sigma_i\,(x_i)^r]^{1/r} & \text{si } r \neq 0 \text{ y } r \leq 1 \\ 1 - (1/\mu(\mathbf{x}))\,[\Pi_i\,(x_i)^{1/n}] & \text{si } r = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Para todo **x** y para todo *r*, $I_r^A(\mathbf{x})$ está normalizado entre 0 y 1. El parámetro *r* refleja grados distintos de aversión por la desigualdad. Cuando $r = 1$, la FBS de Atkinson coincide con el utilitarismo e I_1^A es cero para todas las DR, reflejando la ausencia total de aversión a la desigualdad; mientras que cuando $r = -\infty$ la FBS se convierte en el maximin y sólo importa la situación del individuo con menor renta de la población. Así pues, cuanto menor es *r* mayor es el grado de aversión a la desigualdad del índice I_r^A. Esta propiedad es muy útil para estudiar la robustez de cualquier comparación entre DR ante distintas percepciones de la desigualdad desde el punto de vista de su aversión a la misma. En todo caso, el índice I_r^A es admisible para todo $r < 1$.

2. Dentro de los índices que gozan de una interpretación intuitivamente atractiva, hay que destacar el *índice de Gini* (1912, 1936) que, sin lugar a dudas, es el ID más utilizado durante el siglo XX. En su formulación original,

$$G(\mathbf{x}) = [1/2(n)^2\mu(\mathbf{x})](\Sigma_i\,\Sigma_j\,|x_i - x_j|),\ \mathbf{x} \in R^n,$$

el índice de Gini se interpreta como la media normalizada de la distancia absoluta entre todos los pares de rentas. Sin embargo, el aspecto mejor conocido de este índice es su interpretación gráfica, pues es igual al área normalizada entre la curva de Lorenz de cada distribución y la diagonal principal. Finalmente, también puede expresarse como la suma ponderada de las rentas individuales ordenadas de menor a mayor, donde los coeficientes de ponderación dependen inversamente del rango *i* que éstas ocupen en la secuencia $x^*_1 \leq x^*_2 \leq \ldots\ x^*_n$, de manera que cuanto menor es la renta x^*_i mayor peso tiene en el índice.

Esta última interpretación ha conducido a una generalización donde el índice original no es más que un miembro de una familia de ID obtenida por el procedimiento AKS a partir de una cierta FBS. Donaldson y Weymark (1980) caracterizan la clase de FBS de este tipo que satisface el **PP**, en cuyo caso los I^{AKS} correspondientes dependen de un solo parámetro δ de aversión a la desigualdad; se trata de la familia de *índices de Gini que dependen de un único parámetro* (*single-parameter Ginis*), o *S-Ginis*, que se define por

$$\mathbf{I}_\delta^G(\mathbf{x}) = 1 - (1/\mu(\mathbf{x})n^\delta)\,[\Sigma_i\,(i^\delta - (i-1)^\delta)\,x^*_i{}^\delta],\ \mathbf{x}\in R^n,\ \delta \geq 1. \quad (3)$$

Los ID de esta familia son admisibles para todo $\delta > 1$. La ausencia total o la máxima aversión a la desigualdad, se obtienen para δ igual a 1 o $+\infty$, respectivamente, de forma que la familia acomoda cualquier preferencia por la igualdad con solo elegir valores intermedios del parámetro δ. El índice de Gini original corresponde a $\delta = 2$. Obsérvese que, a diferencia de la mayoría de los ID existentes, esta familia puede tratar rentas negativas.

3. La siguiente familia de índices tiene su origen en la analogía entre una DR y una distribución de probabilidad. Sean 1, 2, 3,… los sucesos que pueden ocurrir con probabilidad p_1, p_2, p_3,… El grado de desorden, o la entropía de un sistema que resume en un número la información agregada contenida en la distribución de probabilidad $\mathbf{p} = (p_1,\ldots, p_n)$ se define por

$$E = - \Sigma_i\, p_i \log p_i.$$

Cuando la probabilidad de que ocurra un suceso es la unidad y la de que ocurran los demás es nula, la entropía alcanza su mínimo valor, 0. Por el contrario, cuando todos los sucesos tienen la misma probabilidad de ocurrir, de manera que $p_i = 1/n$ para todo i, entonces la entropía alcanza su máximo valor $- \Sigma_i\, (1/n)(\log (1/n))$.

Theil (1967) sugirió identificar los n sucesos con los n individuos de la población y reinterpretar p_i como la proporción que la renta del individuo i representa en la renta total, $s_i = x_i/n\mu(\mathbf{x})$, de forma que $s_i\in[0, 1]$ y $\Sigma_i\, s_i = 1$. Entonces, para cada $\mathbf{x}\in D_+{}^n$, la diferencia entre la máxima entropía posible cuando $s_i = 1/n$ y la entropía de $\mathbf{x}$ se puede interpretar como un índice de desigualdad:

$$T_1(\mathbf{x}) = \Sigma_i\, (1/n)\, (x_i/\mu(\mathbf{x})) \log (x_i/\mu(\mathbf{x})).$$

Este índice responde a una cierta noción de entropía donde el valor de la información obtenida cuando ocurre un suceso con una determinada probabilidad *p* se representa por la función h(p) = - log p. Esa especificación pertenece a una clase más amplia de funciones que da lugar a una familia de

ID que, cuando se normaliza para asegurar que todos sus miembros son admisibles, se conoce como la familia de *índices de entropía generalizada*, que viene dada por:

$$I_c(\mathbf{x}) = (1/c^2 - c)\,[(1/n)\,\Sigma_i\,(x_i/\mu(\mathbf{x})^c) - 1], \qquad c \neq 1, 2; \qquad (4)$$

$$I_1(\mathbf{x}) = \Sigma_i\,(1/n)\,(x_i/\mu(\mathbf{x}))\,\log\,(x_i/\mu(\mathbf{x})), \qquad c = 1;$$

$$I_0(\mathbf{x}) = \Sigma_i\,(1/n)\,(\log\mu(\mathbf{x}) - \log x_i, \qquad c = 0,$$

Cuando $c = 1$ se obtiene el índice original de Theil, mientras que el caso $c = 0$ corresponde a la llamada *desviación logarítmica media*; finalmente, cuando $c = 2$, tenemos que $I_2(\mathbf{x}) = (1/2)(CV(\mathbf{x}))^2$, donde $CV(\mathbf{x})$ es el coeficiente de variación de **x**; es decir, $CV(\mathbf{x}) = \sigma(\mathbf{x})/\mu(\mathbf{x})$, donde $\sigma(\mathbf{x})$ es la desviación típica de **x**. El parámetro $c\in(-\infty, \infty)$ captura la distinta sensibilidad del índice a lo que ocurre en determinadas partes de la distribución: cuando c es grande y positivo (negativo) I_c es más sensible a transferenciasque se producen en la cola alta (baja) de la distribución.

Por lo demás, de las expresiones (2) y (4) se deduce que los índices de Atkinson son ordinalmente equivalentes a los de entropía generalizada cuando $r = c < 1$. De hecho, para ese rango de valores tenemos

$$I_r^A(\mathbf{x}) = 1 - [(c^2 - c)\,I_c(\mathbf{x}) + 1]^{1/r}, \qquad I_c(\mathbf{x}) = [(1 - I_r^A(\mathbf{x}))^r - 1]/[(c^2 - c).$$

II. 2. Nuevas propiedades

Junto a las 3 familias definidas en las expresiones (2), (3) y (4), existen otros muchos ID que son también admisibles. En algunas circunstancias, esta multiplicidad de medidas no causa mayor problema. Si sólo nos interesa juzgar si una distribución tiene más o menos desigualdad que otra, es indiferente que utilicemos la familia de índices de Atkinson o los índices de entropía generalizada ordinalmente equivalentes cuando $r = c < 1$. Además, puede ocurrir que otros ID admisibles ordenen las dos distribuciones del mismo modo que los miembros de estas familias. Sin embargo, sabemos que índices distintos pueden discrepar en otras ocasiones. Pero sobre todo, ante dos DR **x** e **y**, a menudo no estamos sólo interesados en comprobar si $I(\mathbf{x}) > I(\mathbf{y})$, sino qué porcentaje supone la diferencia $I(\mathbf{x}) - I(\mathbf{y})$ sobre $I(\mathbf{x})$. En ese caso, incluso ID ordinalmente equivalentes pueden diferir sustancialmente, de manera que la cardinalización del ID que se elija cobra indudable importancia. A modo de ejemplo, tomemos los siguientes valores del coeficiente de variación en tres períodos consecutivos: $CV(\mathbf{x}_I) = 1.5$, $CV(\mathbf{x}_{II}) = 1$ y $CV(\mathbf{x}_{III}) = 0.25$. La desigualdad disminuyó consistentemente, pero ¿cayó más durante el primer par de períodos o durante los dos últimos? El coeficiente de variación indica que $CV(\mathbf{x}_I) - CV(\mathbf{x}_{II}) < CV(\mathbf{x}_{II}) - CV(\mathbf{x}_{III})$. Sin embargo, el índice de entropía generalizada I_2 que, como vimos, es ordinalmente equivalente al CV, nos da el mensaje contrario: $I_2(\mathbf{x}_I) - I_2(\mathbf{x}_{II}) > I_2(\mathbf{x}_{II}) - I_2(\mathbf{x}_{III})$.

La cuestión es ¿cómo utilizar la teoría para seleccionar el o los índices más recomendables en el trabajo empírico? Un procedimiento es proponer otras propiedades de un ID que sean útiles para confrontar problemas que se presentan en la práctica y verificar qué ID admisibles los satisfacen. Por ejemplo, el análisis de DR involucra a menudo la relación entre la desigualdad global en una población y las características de determinados subgrupos de la misma. Consideremos dos islas, A y B, habitadas por individuos que reciben la renta media de la isla en que residen, μ_A y μ_B, respectivamente. La desigualdad *dentro* de cada isla es nula. Si las dos islas se unen para formar una confederación, ¿cabe sostener que la desigualdad global seguirá siendo nula? Siempre que μ_A sea diferente de μ_B, parece que habría que dar una respuesta negativa: aunque no exista desigualdad dentro de los subgrupos, en la confederación habrá desigualdad *entre* los mismos. En consecuencia, es útil contar con un axioma que nos permita relacionar la desigualdad global con la desigualdad dentro o entre los subgrupos de cualquier partición.

Dada $\mathbf{x} \in D^n$, considérese una partición en *J* subgrupos disjuntos, indiciados por j = 1,…, J, de manera que $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(J)})$. Para cada j, denominaremos el tamaño y la media del subgrupo por n^j y $\mu(\mathbf{x}^{(j)})$, respectivamente; a su vez, el vector $\boldsymbol{\mu}^j$ es el vector de tamaño n^j en que cada individuo del subgrupo j recibe la renta media del subgrupo, $\mu(\mathbf{x}^{(j)})$. Se dice que un ID es *aditivamente descomponible*, o simplemente *descomponible* (**D**), si ante cualquier partición de la DR $\mathbf{x} \in D^n$, la desigualdad global puede escribirse como

$$I(\mathbf{x}) = \Sigma_j\, w^j\, I(\mathbf{x}^{(j)}) + I(\boldsymbol{\mu}^1, \ldots, \boldsymbol{\mu}^J), \qquad (5)$$

donde la expresión $I(\mathbf{x}^{(j)})$ es la desigualdad dentro del subgrupo j; los coeficientes de ponderación w^j sólo dependen del tamaño y las medias de los subgrupos y de la población, y $I(\boldsymbol{\mu}^1, \ldots, \boldsymbol{\mu}^J)$ es la desigualdad entre los subgrupos calculada como la desigualdad de la población en que cada individuo recibe la renta media del subgrupo al que pertenece[9]. En el ejemplo de la unión de las dos islas, la desigualdad de la DR de la confederación será igual a la desigualdad entre las dos islas.

Por otra parte, dentro del marco en que nos venimos moviendo los individuos son moralmente idénticos en el sentido de que *a priori* todos tienen el mismo derecho a una porción de la

[9] Hay otras descomposiciones alternativas. Dentro del enfoque ético a la medición de la desigualdad, Blackorby *et al.* (1981, 1999) proponen medir la desigualdad dentro de cada subgrupo de acuerdo con la expresión (1), y la desigualdad entre los subgrupos como la que existe cuando a cada individuo se le asigna la REID del subgrupo a que pertenece.

renta total. Sin embargo, éstos pueden tener distintas características –como la edad, el sexo, la ocupación, el nivel educativo o la región de residencia– que aunque no les legitimen para reclamar más renta, dan lugar a las siguientes preguntas interesantes. ¿Hasta que punto puede "explicarse" la desigualdad global en términos de las diferencias de renta entre los subgrupos de las particiones inducidas por esas características? ¿Qué factores explican un porcentaje mayor de la desigualdad global, los factores demográficos (edad, sexo, tamaño del hogar), los socioeconómicos (nivel educativo, ocupación, categoría social) o los geográficos (región, tamaño del municipio)? Pues bien, dadas dos características de la población que dan lugar a sendas particiones en J y K subgrupos, respectivamente, decimos que la primera es más importante como un determinante de la desigualdad que la segunda si $I(\boldsymbol{\mu}^1,\ldots,\boldsymbol{\mu}^J)/I(\mathbf{x}) > I(\boldsymbol{\mu}^1,\ldots,\boldsymbol{\mu}^K)/I(\mathbf{x})$.

Es fácil demostrar que, para cada c, los índices de entropía generalizada I_c satisfacen la propiedad **D** con

$$w_c^{\,j} = (n^j/n)[\mu(\mathbf{x}^{(j)})/\mu(\mathbf{x})]^c. \tag{6}$$

Pues bien, el siguiente resultado indica esencialmente que, dentro de los ID admisibles, los únicos que son **D** son los índices de entropía generalizada.

<u>Teorema 4</u> (Bourguignon, 1979, Cowell, 1980, Shorrocks, 1980). Un ID I: D $\rightarrow$ R_+ es continuo, tiene primeras derivadas continuas y satisface la propiedad **D** si y sólo es un múltiplo escalar positivo de un miembro de la familia de entropía generalizada.

Este resultado es muy poderoso. Siempre que estemos interesados en expresar la desigualdad global en términos de la desigualdad dentro y entre los subgrupos de cualquier partición, *tenemos que* elegir algún miembro de esta familia. Por otra parte, debe observarse que sólo cuando la suma de los pesos $w_c^{\,j}$ es igual a la unidad es posible separar con nitidez los dos términos en la expresión (5), lo cual nos restringe a los casos c = 1, 0. Cuando c = 1, $w_c^{\,j} = \Sigma_i x_i^j/\Sigma_i x_i$, de forma que los subgrupos más ricos pesan más en la desigualdad global, mientras que cuando c = 0, $w_c^{\,j} = n^j/n$, de forma que los subgrupos contribuyen a la desigualdad en función de su importancia demográfica. Puesto que normativamente es preferible la segunda opción, en la medida que estemos interesados en **D** debemos utilizar el índice I_0.

Es indudable que esta propiedad es extraordinariamente útil en la práctica. Pero esto no la hace necesariamente aceptable como un requisito general que debamos exigir de todo ID. Sin embargo, la siguiente propuesta de Shorrocks (1988) relaciona la desigualdad global con la desigualdad dentro de los subgrupos de una partición de forma mucho más aceptable para todos (no obstante, véase la crítica al respecto en el apartado III.3).

Consistencia Subgrupal (**CS**). Considérese cualquier partición de la población entre J subgrupos disjuntos. Si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D^n$ tales que $n^j(\mathbf{x}) = n^j(\mathbf{y})$, $\mu(\mathbf{x}^{(j)}) = \mu(\mathbf{y}^{(j)})$ e $I(\mathbf{x}^{(j)}) > I(\mathbf{y}^{(j)})$ para todo j, entonces $I(\mathbf{x}) > I(\mathbf{y})$.

Supongamos que dividimos la población entre hombres y mujeres. Si la desigualdad dentro de ambos grupos aumenta sería verdaderamente perverso que la desigualdad global disminuyera (independientemente de lo que ocurra con la desigualdad entre los grupos). En otro ejemplo, consideremos la partición de la población en J regiones. Si la desigualdad dentro de una región disminuye como consecuencia de la política económica que se desarrolla en ese territorio, manteniéndose constante en todas las demás, parece deseable que pueda concluirse que la desigualdad en el país en su conjunto también disminuye. La **CS**, en suma, es una propiedad de respuesta positiva ante cambios en la desigualdad dentro de los subgrupos de cualquier partición.

La propiedad **CS** es más débil que la **D**. La segunda implica la primera, por lo que los índices I_c la satisfacen, pero la primera no implica la segunda, como se demuestra con los índices de Atkinson que satisfacen **CS** pero no **D**. Así pues, la clase de ID que son **CS** es mayor que la de aquellos que son **DA**, ¿pero cuanto mayor?. El siguiente resultado de Shorrocks (1988) responde a esta pregunta.

Teorema 5. Un ID $I: D \rightarrow R_+$ es continuo, admisible y satisface **CS** si y sólo si para algún c y alguna función $F: R \rightarrow R$ continua, creciente y con $F(0) = 0$,

$$F\,[I(\mathbf{x})] = I_c(\mathbf{x}), \text{ para todo } \mathbf{x} \in D. \tag{7}$$

Así pues, la condición **CS** proporciona por si sola la mayor parte de la justificación para el uso de los índices de entropía generalizada[10]. Si un ID continuo no es una transformación monótona de uno de los índices I_c, o bien no es admisible o admite la posibilidad de que, para cierta partición, un aumento de la desigualdad en todos los subgrupos conduzca a una reducción de la desigualdad global[11].

---

[10] Shorrocks (1988) discute dos formas alternativas de medir la contribución a la desigualdad global de la desigualdad dentro de los subgrupos de una partición. La consistencia entre ambas es la condición adicional que nos permite volver desde la expresión (7) a la familia I_c como tal.

[11] El índice de Gini, que no satisface ni **D** ni **CS**, es descomponible en tres términos que recogen la desigualdad dentro y entre los subgrupos de cualquier partición, más un residuo sobre cuya interpretación puede verse Deutsch y Silber (1999). Para una aplicación interesante de esta descomposición, véase Milanovic y Yitzhaki (2002).

III. REVISIÓN CRÍTICA DE LOS SUPUESTOS MÁS IMPORTANTES

Este apartado se dedica fundamentalmente a la revisión crítica de los supuestos presentados en los dos apartados anteriores y las razones, en su caso, para mantenerlos. Consta de 4 secciones, la primera de las cuales versa sobre el Principio de Transferencias (**PT**), que ocupa el corazón del análisis moderno de la desigualdad de la renta. La segunda sección discute las objeciones frente al Principio de la Población (**PP**) y los supuestos de descomponibilidad (**D**) o Consistencia Subgrupal (**CS**). La tercera sección subraya la existencia de varias nociones alternativas de desigualdad que dependen de cómo concibamos el impacto que ejercen sobre la desigualdad los cambios simultáneos en todas las rentas individuales. En ese contexto, la condición de la Independencia de la Escala (**IE**) ante cambios equiproporcionales de las rentas no es más que un ejemplo importante asociado a lo que se llama la medición intensiva (o relativa) de la desigualdad. Finalmente, la cuarta sección contrasta las recomendaciones prácticas que surgen de la teoría con el trabajo empírico efectivamente realizado por los economistas durante los últimos 35 años.

III. 1. El Principio de las Transferencias

Como indica Kolm (1999), la transferencia de un euro de un rico a un pobre se considera en cualquier sociedad algo "bueno", "aceptable" o incluso "justo". En una sociedad de dos individuos con rentas distintas, tal transferencia disminuye sin duda alguna la desigualdad. Pero la propuesta de que una transferencia progresiva disminuye *siempre* la desigualdad en cualquier sociedad es una idea atrevida, audaz y original.

Para apreciar tal atrevimiento, o si se quiere, para apreciar las dificultades de esta propuesta, basta considerar el siguiente ejemplo. Sea **x** = (1, 4, 7, 10, 13), y supongamos que se produce una transferencia progresiva de una unidad desde el tercer al segundo individuo para alcanzar la DR **y** = (1, 5, 6, 10, 13). De acuerdo con el **PT**, la desigualdad de **y** es menor que la de **x**. Sin embargo, si dividimos la población en dos grupos compuestos por los dos primeros y los tres últimos individuos, respectivamente, parecería que la desigualdad aumenta pues pasamos de (1, 4) a (1, 5), y de (7, 10, 13) a (6, 10, 13). Este ejemplo pone de manifiesto que el **PT** es una propiedad local. Desde un punto de vista global no está claro en absoluto que cualquier transferencia progresiva conduzca a un descenso de la desigualdad. La razón es que la transferencia disminuye la desigualdad entre el donante y el beneficiario, así como, posiblemente, entre otros pares de individuos; pero también altera en la dirección contraria la posición relativa del donante respecto de los más ricos o los igualmente ricos, y la del beneficiario respecto de los más pobres o los igualmente pobres.

En estas circunstancias, considérese la posibilidad de hacer un experimento donde se presente a la gente ejemplos de esta naturaleza para averiguar si aceptan o no el **PT**. Eso es precisamente lo que se ha hecho en la práctica. En un volumen destinado a difundir y resumir los resultados de tales experimentos, Amiel y Cowell (1999) informan que sólo el 35% de una muestra de 1.108 estudiantes acepta el **PT** a través de comparaciones numéricas. Cuando el cuestionario incluye una formulación verbal del problema, el apoyo aumenta hasta el 60%, lo cual sigue contrastando con el acuerdo unánime en torno al **PT** que encontramos en la literatura profesional.

Hay otro aspecto del problema que merece destacarse. Es fácil comprobar que una secuencia de transferencias progresivas que agoten toda posibilidad de ulteriores transferencias de este tipo conduce a la distribución igualitaria. Pero esto no implica que exista un acuerdo general sobre si disminuye la desigualdad en todas las etapas del proceso. Considérese una sociedad con el mismo número inicial de ricos y pobres donde efectuamos una secuencia de transferencias progresivas entre un rico y un pobre situados a ambos lados de la media de la distribución. Para algunos, la percepción de la desigualdad puede depender del tamaño de distintos grupos de individuos con rentas similares. Así, a medida que se va formando una clase media el tamaño de los dos grupos extremos disminuirá, lo que puede interpretarse como una disminución de la desigualdad. En algún punto del proceso tendremos una clase media dominante, flanqueada por dos grupos minoritarios de pobres y ricos; si tales grupos fueran del 20% o el 15% cada uno, por ejemplo, la bifurcación en tres grupos podría verse como un aumento de la desigualdad. A medida que el proceso continua y los dos grupos extremos tienden a desaparecer a favor de una única clase media, podría pensarse que la desigualdad vuelve a disminuir. Sin embargo, desde el punto de vista local del **PT**, para el que el tamaño de los distintos grupos de individuos con rentas similares es irrelevante, la desigualdad disminuye continuamente a lo largo del proceso.

La importancia de estos efectos grupales se pone también de manifiesto cuando, en lugar del proceso de convergencia a la media global de la distribución, consideramos la concentración en torno a medias locales o modas. En el ejemplo anterior, supongamos que las transferencias progresivas tienen lugar a ambos lados de la media por separado, tanto dentro del grupo inicial de los ricos como dentro del grupo de los pobres. Como resultado de las transferencias progresivas, los ricos convergen a una renta relativamente alta, mientras que los pobres lo hacen en torno a una renta relativamente baja. Es decir, la sociedad queda polarizada en dos grupos con rentas iguales pero muy diferentes entre sí, lo que acentúa tanto la sensación de proximidad dentro del conjunto de los ricos y de los pobres como la sensación de lejanía o alienación entre pobres y ricos. Ajeno a estas consideraciones, el **PT** indicaría un descenso continuo de la desigualdad.

A la vista de esta situación, Kolm (1999) aisla los casos en que, en sociedades con más de dos individuos, es razonable mantener el **PT**. En primer lugar, considérese la sustitución de todas las rentas por encima o por debajo de un cierto nivel por ese nivel (*truncaciones*). El paso desde la distribución **x** = (1, 4, 7, 10, 13) a la distribución **t** = (4, 4, 7, 10, 10) es un ejemplo de truncación en ambos extremos de la distribución que preserva la media (*bitruncación equilibrada*). En segundo lugar, considérese la redistribución igualitaria de una cierta fracción de la renta total (*concentración*). Dada $\mathbf{x} \in D$, una concentración **c** se obtiene de forma que, para cada *i*, $c_i(k) = (1 - k)\, x_i + k\, \mu(\mathbf{x})$, donde *k* es un número entre 0 y 1. En el ejemplo anterior, donde $\mu(\mathbf{x}) = 7$, tomemos el caso de k = ½. Entonces **c** = (4, 5.5, 7, 8.5, 10). Kolm sugiere que dentro de las transformaciones que disminuyen inequívocamente la desigualdad incluyamos solo las secuencias de truncaciones y concentraciones (y algunos otros casos intermedios entre esos dos que pueden consultarse en el artículo original).

Las bitruncaciones equilibradas y las concentraciones pertenecen a la clase más amplia de *transferencias que cruzan la media*, todas las cuales pueden alcanzarse a través de una secuencia de transferencias progresivas. En consecuencia, cualquiera de ellas conduce a un desplazamiento hacia dentro de la curva de Lorenz correspondiente. Sin embargo, el principio de que cualquier transferencia que cruza la media disminuye la desigualdad es menos aceptable porque puede dar lugar a subgrupos de individuos cuya desigualdad aumente. Tomemos el caso de la distribución **z** = (1, 5, 7, 9, 13) obtenida a partir de **x** = (1, 4, 7, 10, 13) por una transferencia progresiva de una unidad entre el cuarto y el segundo individuo; esta transferencia cruza la media en el sentido de que $4 < \mu(\mathbf{x}) = 7 < 10$. Si tomamos los conjuntos formados por los dos primeros individuos, o el cuarto y el quinto, comprobaremos que su desigualdad aumenta tras la transferencia. Menos aceptable aún sería el **PT** ante transferencias progresivas que no cruzan la media, como se puso de manifiesto en el ejemplo original de las DR **x** = (1, 4, 7, 10, 13) e **y** = (1, 5, 6, 10, 13).

Naturalmente, la restricción del **PT** a los casos señalados reduce el número de distribuciones con la misma población y la misma media que son comparables; es decir, el criterio resultante sería todavía más incompleto que el criterio de Lorenz que se presentó en el apartado I.2. La posición de Kolm es que, fuera de esos casos, la aceptación del **PT** exige razones adicionales cuya validez dependerá del problema concreto que se está estudiando. A modo de ilustración, distinguiremos tres tipos de razones.[12] En primer lugar, hay que recordar la íntima conexión entre el **PT** y el criterio de Lorenz. Una versión del T1 dice que para distribuciones $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D^n$ con la misma población y la

[12] Para una discusión más completa, véase Kolm (1999), donde además se incluyen otros casos distintos de los tratados aquí.

misma media, la dominancia de **x** sobre **y** de acuerdo con el criterio de Lorenz es equivalente a que **x** pueda obtenerse a partir de **y** a través de una secuencia de transferencias progresivas. Una buena razón práctica para la adopción del **PT**.

En segundo lugar, considérese la siguiente propiedad de un ID. Un ID I: $D^n \rightarrow R$ posee la propiedad de la *independencia de las rentas fijas* (**IRF**), o *independencia de los individuos irrelevantes*, si un cambio en un subconjunto de las rentas de una distribución que varíe la desigualdad, varía también la desigualdad en la misma dirección cuando las rentas fijas se mantienen a otro nivel. Es decir, sea $\mathbf{y} \in D^m$ y sean (**x**, **y**) y (**x'**, **y**) dos distribuciones en D^n, donde tanto **x** como **x'** tienen la dimensión n – m. La **IRF** exige que si I(**x**, **y**) > I(**x'**, **y**), entonces I(**x**, **z**) > I(**x'**, **z**) para todo $\mathbf{z} \in D^m$. Recordemos también la propiedad mínima de cualquier ID *I*, según la cual si en la distribución igualitaria la desigualdad es nula, para cualquier distribución **x** que no sea la igualitaria I(**x**) > 0. Pues bien, esta propiedad mínima junto con la **IRF** implican las propiedades **S** y **PT**[13] (Kolm, 1966, 1976b). Desde este punto de vista, siempre que la **IRF** sea aceptable, también lo será el **PT** (véase el apartado III.2 para una crítica del **IRF**).

En tercer lugar, considérese la propiedad que Kolm (1999) denomina de *rendimientos crecientes a la proximidad* (o *rendimientos decrecientes a la distancia*) según la cual la existencia de grupos de individuos con la misma renta generaría menos desigualdad que si tales individuos tuvieran rentas distintas, por próximas que éstas fueran. En el caso extremo en que sólo preocupara la distinción entre la igualdad estricta o la diferencia entre las rentas individuales, un índice aceptable de desigualdad podría ser la proporción de pares de individuos con rentas distintas. Consideremos el ejemplo en que **y** = (2, 3, 4, 5) se obtiene a partir de **x** = (2, 2, 5, 5) a través de una transferencia progresiva de una unidad desde el tercero al segundo individuo. La distribución **x** sólo tiene 4 pares de rentas distintos, mientras que en la distribución **y** los 6 pares posibles tienen rentas distintas. Así pues, desde este punto de vista la distribución **x** tiene menos desigualdad que la **y**. Todo lo cual pone de manifiesto que la propiedad crucial para defender el **PT** es la contraria: los *rendimientos decrecientes a la proximidad* (o los *rendimientos crecientes a la distancia*), en cuyo caso la misma reducción absoluta de la renta η' disminuye menos la desigualdad entre las rentas η' y η, donde $\eta < \eta'$, cuanto más cercana esté η a η'. En ese caso lo que importa es comparar el número de pares en que aumenta o disminuye la desigualdad ante una transformación dada. En particular, puede demostrarse que como consecuencia de cualquier transferencia progresiva el número de pares donde se puede afirmar que la desigualdad desciende es

---

[13] También implica que el ID adopta la siguiente estructura aditiva: I(**x**) = H $\{\Sigma_i f[x_i, \mu(\mathbf{x})]\}$.

mayor que el de los pares en que ocurre lo contrario[14]. Además, la suma de las diferencias de renta entre pares de individuos desciende; en el ejemplo, esta suma pasa de 12 a 10[15].

Así pues, puede concluirse que aunque el **PT** no sea un concepto primitivo que haya que aceptar sin discusión, existen razones que justifican su adopción en determinadas circunstancias. La alternativa de restringirnos a un conjunto de transferencias del que pueda predicarse la disminución de la desigualdad –bitruncaciones equilibradas, concentraciones y otros casos intermedios dentro de las transferencias progresivas que cruzan la media– nos conduce a ordenaciones bastante incompletas. Lo que es peor, hasta el momento no contamos con procedimientos operativos para detectar en la práctica qué DR son comparables con arreglo a este criterio más restrictivo.

No obstante, esta discusión ha puesto de manifiesto los costes que conlleva la aceptación irreflexiva del **PT**. En particular, queda claro que es imposible lidiar con situaciones donde importe el tamaño de subgrupos de individuos con rentas similares pero dispares entre si. Afortunadamente, contamos con trabajos recientes sobre el concepto de *polarización* que toma en cuenta estos aspectos (Esteban y Ray, 1994, y Wolfson, 1994). Por todo lo cual, en aras del pragmatismo, no habrá inconveniente en lo sucesivo en identificar *una* noción de desigualdad interesante con la aceptación sin restricciones del **PT**.

III. 2. Otras propiedades con consecuencias prácticas importantes

Como hemos visto, el **PT** ocupa el corazón conceptual del tipo de desigualdad que se revisa en este trabajo. Una vez adoptado, aún con reservas o después de analizar sus aspectos más discutibles, resta ahora atender a propiedades que tienen gran importancia en la práctica, como son el **PP** y la **CS**.

El papel práctico del **PP** ya se ha expuesto en el apartado I.3: permite comparar distribuciones de distinto tamaño. Lo cual no significa que esté exento de críticas. En primer lugar, comparemos las DR $\mathbf{x} = (1, 100)$ e $\mathbf{y} = (1, 1, 100, 100)$, donde $\mathbf{y}$ constituye una réplica de $\mathbf{x}$. Para los que crean que la presencia de rentas bajas agudiza los problemas creados por la desigualdad, puede muy bien opinar que $I(\mathbf{x}) < I(\mathbf{y})$, contrariamente a lo estipulado por el **PP** (véase, por ejemplo, las reservas expuestas en Cowell, 1995, p. 56). En segundo lugar, consideremos de nuevo el caso de los rendimientos crecientes a la proximidad que se esgrimió frente al **PT** en el apartado III.1 Si todo lo que preocupa

[14] En el ejemplo anterior, donde $\mathbf{x} = (2, 2, 5, 5)$ e $\mathbf{y} = (2, 3, 4, 5)$, la desigualdad aumenta para los pares formados por el primero y el segundo individuo y el tercero y el cuarto, se mantiene constante para el par formado por el segundo y el cuarto individuo y desciende para los otros 3 pares.

[15] En el ejemplo inicial donde $\mathbf{x} = (1, 4, 7, 10, 13)$ se transforma en $\mathbf{y} = (1, 5, 6, 10, 13)$, la desigualdad aumenta para tres pares, se mantiene constante en otros tres y desciende en los cuatro restantes. La suma de las diferencias de renta entre pares es 60 para $\mathbf{x}$ y 58 para $\mathbf{y}$.

son los pares de rentas diferentes, un ID adecuado es simplemente la proporción de éstos existente. Repliquemos *m* veces un población de *n* individuos con rentas diferentes entre sí. Hay *mn* individuos y $nm(nm-1)/2$ pares de rentas. Como cada renta inicial se ha replicado *m* veces, habrá $m(m-1)/2$ pares de renta iguales. La proporción de pares de este tipo será $(m-1)/(nm-1)$, de manera que el valor del ID será $m(n-1)/(nm-1)$. Así pues, la desigualdad varía proporcionalmente con el número *n* de rentas iniciales, pero disminuye a medida que replicamos la población, es decir, a medida que aumenta *m*. Sin embrago, el **PP** exige que la desigualdad se mantenga constante para todo *m*. Si al aceptar el **PT** rechazamos los rendimientos crecientes (y constantes) a la proximidad, parece natural aceptar también el **PP** y beneficiarnos de sus consecuencias prácticas.

En cuanto a la **CS**, ya hemos visto que nos conduce inexorablemente a la familia de ID de entropía generalizada (o algún otro índice ordinalmente equivalente), lo cual nos permite expresar la desigualdad global como la suma ponderada de la desigualdad dentro de los subgrupos de cualquier partición y un término que captura la desigualdad entre los mismos (véase la expresión (6)).

La **CS** exige que las consecuencias sobre la desigualdad global de los cambios dentro de un subgrupo de cualquier partición sean independientes de los valores que tomen las rentas de los individuos en los demás subgrupos (siempre que la desigualdad dentro de éstos permanezca constante o varíe en la misma dirección que lo hace la desigualdad en el subgrupo en cuestión). En particular, es fácil verificar que la **CS** implica la propiedad de **IRF** que se introdujo en el apartado III.1. Este supuesto, según el cual *todas* las interacciones relevantes operan exclusivamente *dentro* de cada grupo de *cualquier* partición no captura necesariamente una situación que sea de general aceptación.

Consideremos el siguiente ejemplo tomado de Foster y Sen (1997). En una partición en dos grupos, el grupo 1 tiene la distribución $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 3, 8, 8)$ que cambia a $\mathbf{y}^{(1)} = (2, 2, 7, 9)$, mientras que el grupo 2 tiene la distribución igualitaria $\mathbf{x}^{(2)} = (a, a)$. Según la **IRF**, la dirección del cambio en la desigualdad global al pasar de $\mathbf{x} = (\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = (1, 3, 8, 8, a, a)$ a $\mathbf{y} = (\mathbf{y}^{(1)}, \mathbf{y}^{(2)}) = (2, 2, 7, 9, a, a)$ debe ser independiente de *a*. De hecho, dentro de la familia de índices de entropía generalizada, $I_c(\mathbf{x}) > I_c(\mathbf{y})$ para los miembros con $c > 2$, es decir, para los ID de la familia más sensibles a las transferencias que se producen en la cola alta de la distribución, mientras que $I_c(\mathbf{x}) < I_c(\mathbf{y})$ para los miembros con $c < 2$, es decir, los ID más sensibles a lo que ocurre en la cola contraria. Supongamos que (a, a) = (2, 2), de modo que $\mathbf{x'} = (1, 2, 2, 3, 8, 8)$ e $\mathbf{y'} = (2, 2, 2, 2, 7, 9)$. Supongamos también que (a, a) = (8, 8), de forma que $\mathbf{x''} = (1, 3, 8, 8, 8, 8)$ e $\mathbf{y''} = (2, 2, 7, 8, 8, 9)$. En el primer caso, dos tercios de las rentas en **y'** son iguales, mientras que en el segundo ese es el porcentaje de rentas iguales en **x''**. Contrariamente a lo que **CS** exige, es razonable sugerir que deberíamos tener I(**x'**) > I(**y'**) pero I(**x''**) < I(**y''**). De hecho, eso es lo que indica, por ejemplo, el índice de Gini. Este índice, como otros ID admisibles (pero no aditivamente separables) tiene en cuenta algo más que los cambios en las rentas dentro del subgrupo afectado. En cambio, los índices que satisfacen **CS** –como, por ejemplo, los índices de Atkinson– ignoran cierto tipo de información potencialmente relevante.

Según Foster y Sen (1997), imponer sobre un ID una estructura como la de la expresión (5) es admisible para ciertas particiones, pero ¿qué sentido tiene exigirla para particiones de la población en función, por ejemplo, de la inicial del apellido de los individuos? En tales casos no habría por qué aceptar las implicaciones correspondientes. El problema, por supuesto, es que formalmente las condiciones **D** o **CS** se exigen para *todas* las particiones. Lo cual, como sabemos, desemboca en la estructura de separabilidad aditiva que caracteriza la familia de índices de Atkinson o de entropía generalizada. La utilización de estos ID aditivamente separables implica un ejercicio de evaluación social donde cualquier relación entre las rentas individuales es irrelevante porque cada renta individual resulta *completamente* independiente de las demás.

Llegados a este punto, recordemos simplemente tanto las ventajas de orden práctico de los ID descomponibles, como la existencia de poderosas razones en su favor. En particular, el rechazo de la **CS** implicaría aceptar la existencia de alguna partición para la cual la interdependencia entre las rentas de individuos pertenecientes a subgrupos diferentes es tan fuerte que a pesar de que, por ejemplo, la desigualdad aumente en todos los subgrupos, tengamos que la desigualdad global disminuye. Por lo demás, al referirse a todas las particiones concebibles, los requisitos actuales de descomponibilidad imponen tanta estructura sobre los ID que las satisfacen que resultan discutibles para muchos; sin embargo, es de esperar que las aplicaciones prácticas se limiten a particiones donde esos requisitos tengan sentido.

III. 3. La Independencia de la Escala (IE) y otros juicios de valor alternativos

Una de las propiedades que hemos sugerido para considerar un ID admisible es la **IE**, según la cual $I(\lambda \mathbf{x}) = I(\mathbf{x})$, $\lambda > 0$. Como señala Kolm (1976a, 1999), esta propiedad significa que la desigualdad se concibe como lo que las ciencias naturales denominan una magnitud *intensiva* (por oposición a una magnitud *extensiva*, que queda multiplicada por λ ante variaciones equiproporcionales de todos los argumentos). Por lo demás, se dice que una magnitud es *superintensiva [subintensiva]* cuando, para todo $\lambda > 0$, $I(\lambda \mathbf{x}) > [<] I(\mathbf{x})$, respectivamente. Como los cambios de todas las rentas en la misma proporción dejan las rentas relativas constantes y disminuyen las diferencias de rentas entre los individuos, no tiene sentido que una medida de desigualdad sea subintensiva.

Otra propiedad potencialmente interesante es la *invarianza ante variaciones absolutas iguales* (**IVAI**) de todas las rentas -que Kolm denomina *equal-invariance*. Formalmente, un ID *I* posee esta propiedad cuando, para todo $\mathbf{x}\in D$, $I(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}) = I(\mathbf{x})$, donde **e** es un vector n-dimensional cuyas componentes son todas iguales a la unidad y τ es un escalar tal que $(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e})\in D$. Se dice que una medida es *superigual [subigual]* cuando, para todo τ tal que $(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e})\in D$, $I(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}) < [>]\ I(\mathbf{x})$, respectivamente. Puesto que un incremento absoluto de todas las rentas en la misma magnitud no altera las diferencias absolutas entre las rentas y disminuye las relativas, no tiene sentido que un ID sea superigual.

El problema es que en la literatura sobre la desigualdad de la renta tales invarianzas se han confundido con la distinción entre las formas relativa y absoluta de una medida, donde la forma relativa no es más que la forma absoluta dividida por la media, es decir, $I_R(\mathbf{x}) = I_A(\mathbf{x})/\mu(\mathbf{x})$. Por ejemplo, todo índice I^{AKS} definido en la expresión (1) es un índice relativo. La forma absoluta que, teniendo en cuenta los trabajos de Kolm (1976a,b) y Blackorby y Donaldson (1980), denominaremos por I^{KBD}, se define por:

$$I^{KBD}(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \zeta(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in R^n. \qquad (8)$$

Para cada DR, el I^{KBD} proporciona la renta *per capita* de que puede prescindirse, manteniendo el mismo nivel de bienestar social, si la cantidad restante de renta fuera distribuida igualitariamente. Evidentemente, $I^{AKS}(\mathbf{x}) = I^{KBD}(\mathbf{x})/\mu(\mathbf{x})$.

La mayoría de las medidas relativas no son **IE** o intensivas, y la mayoría de las absolutas no son **IVAI**[16]. Ahora bien, una medida intensiva debe tener una forma relativa porque si tuviera una forma absoluta la forma relativa correspondiente sería subintensiva. Análogamente, un índice que satisfaga **IVAI** debe adoptar forma absoluta; en otro caso, la forma absoluta correspondiente sería superigual. Sin embargo, como los cambios equiproporcionales de todas las rentas dejan constantes las posiciones relativas de los individuos, se dice habitualmente que un ID que satisface **IE** es un *índice de desigualdad relativa* (o un *índice relativo de desigualdad*). Similarmente, como los cambios de todas las rentas en la misma magnitud dejan constantes las distancias absolutas entre las rentas individuales,

[16] En particular, recordemos que el I^{AKS} es intensivo si y sólo si la FBS de la que se obtiene es homotética. Similarmente, el índice I^{KBD} es invariante ante variaciones iguales si y sólo si la FBS de la que se obtiene es trasladable. Una FBS *W* es *trasladable* si puede escribirse como $W(\mathbf{x}) = W^*(V(\mathbf{x}))$, donde W^* es creciente y *V* es trasladable de orden uno de manera que, para todo **x** y $(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e})$ en el dominio de *W*, $V(\mathbf{x} + \tau\mathbf{e}) = V(\mathbf{x}) + \tau$.

se dice que un ID que es **IVAI** es un *índice de desigualdad absoluta* (o un *índice absoluto de desigualdad*). Este uso está tan completamente extendido que lo mantendremos de aquí en adelante.

Al margen de las denominaciones, Kolm (1976a, p. 419) nos recuerda la siguiente anécdota. *"En mayo de 1968 en Francia, los estudiantes radicales desencadenaron una revuelta estudiantil que indujo a los trabajadores a declarar una huelga general. Todo terminó en los acuerdos de Grenelle que decretaron un 13% de incremento en todos los sueldos y salarios…Los Radicales se sintieron amargados y engañados; desde su punto de vista, esto incrementó ampliamente la desigualdad de la renta…En otros países...los sindicatos son más astutos y, para evitar el efecto anterior, insisten a menudo en incrementos iguales en términos absolutos, no relativos, de las remuneraciones."* Para Kolm *"…no es menos legítimo asignar la desigualdad entre dos rentas a su diferencia en lugar de a su cociente"*. En todo caso, para diferenciar ambas posturas este autor sugiere que las concepciones que se han dado en llamar relativa y absoluta corresponden a una visión *derechista* o *izquierdista*, respectivamente, de la desigualdad.

Pero esto no es todo. Kolm (1999) indica que, confrontados con la comparación de las DR **x** = (0, 1) e **y** = (0, 10), no ha encontrado a nadie que sostenga que la desigualdad ha permanecido constante. Lo mismo sucedería si se compararan **x'** = (0.01, 1) e **y** = (0.1, 10). Para estas personas la desigualdad es una magnitud superintensiva, de manera que si todas las rentas aumentan en la misma proporción la desigualdad habrá aumentado A continuación, Kolm sostiene que cuando se comparan las distribuciones **x** = (0, 1) y **z** = (9, 10), muchos indican que la desigualdad ha disminuido, es decir, manifiestan una visión subigual de la desigualdad. Una forma de interpretar que algunas personas mantengan simultáneamente una noción superintensiva y subigual de la desigualdad, es indicar que estas personas tiene una visión *intermedia* (o *centrista*) de este fenómeno.

Lo importante de esta discusión es resaltar que la defensa de un determinado concepto de desigualdad en el continuo que va desde las medidas relativas a las absolutas, pasando por las intermedias, entraña un juicio de valor que conviene explicitar. De hecho, en los experimentos citados de Amiel y Cowell (1999) sólo la mitad de los entrevistados adoptan una visión relativa de la desigualdad. Por lo demás, en lo que se refiere al concepto de desigualdad absoluta la teoría se ha desarrollado en paralelo a la de la desigualdad relativa que se ha descrito en el apartado anterior. En primer lugar, contamos con resultados análogos a los T1 y T2 que utilizan la llamada *curva de Lorenz absoluta* y una noción de índices admisibles donde la **IE** se sustituye por la **IVAI** (véase Moyes, 1999). En segundo lugar, contamos con indicadores completos de desigualdad absoluta que satisfacen un conjunto amplio de propiedades deseables. En particular, el más conocido de los índices I^{KBD} se obtiene cuando la FBS W es trasladable, continua, S-cóncava, creciente y aditivamente separable, en cuyo caso tenemos la llamada familia de *índices de Kolm* para distintos valores del parámetro $\gamma \geq 0$:

$$I_0^K(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in R^n, \text{ cuando } \gamma = 0,$$

$$I_\gamma^K(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) + (1/\gamma) \ln [(1/n) \Sigma_i \exp(-\gamma x_i)], \mathbf{x} \in R^n, \text{ cuando } \gamma > 0.$$

El parámetro γ refleja grados distintos de aversión por la desigualdad. Así, cuando $\gamma = 0$, $I_0^K(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$, reflejando la ausencia total de aversión a la desigualdad, mientras que cuando γ tiende a $+\infty$, $I_\infty^K(\mathbf{x}) = \mu(\mathbf{x}) - \min_i (x_i)$ y sólo importa la situación del individuo con menor renta de la población; así pues, cuanto mayor es γ mayor es el grado de aversión a la desigualdad que muestra I_γ^K. Como todos los índices I^{KBD}, los miembros de esta familia son normativamente significativos y miden la cantidad absoluta de renta *per capita* que se pierde debido a la desigualdad. Como la familia de S-Ginis, los índices de Kolm pueden aplicarse a vectores con rentas negativas y son admisibles para todo $\gamma > 0$. Finalmente, un importante resultado de Chakravarty y Tyagarupananda (1998) identifica la clase de índices absolutos que son aditivamente descomponibles.

Teorema 5. Sea I: D→ R un ID que posee segundas derivadas. El índice I satisface las cuatro condiciones **S**, **PT**, **PP**, **IVAI** y es descomponible si y sólo si es un múltiplo positivo de la varianza o una transformación creciente de la familia de índices de Kolm.

III. 4. Algunos rasgos del trabajo empírico

A la luz de las páginas anteriores deberíamos esperar que el trabajo empírico basado en la aceptación del **PT** y el **PP** se moviera en dos planos de acuerdo con las recomendaciones siguientes.

En primer lugar, para verificar si dos DR $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in D$, pueden ser ordenadas unánimemente por todos los ID admisibles, se deberían comparar sus curvas de Lorenz. Supongamos, por ejemplo, que $\mu(\mathbf{x}) \leq \mu(\mathbf{y})$, en cuyo caso es fácil comprobar que si **x** tiene la misma o mayor desigualdad absoluta que **y**, entonces **x** tendrá necesariamente mayor desigualdad relativa. Por consiguiente, (i) deberíamos comparar primero las curvas de Lorenz absolutas de las dos distribuciones. Si se verifica que **x** tiene la misma o mayor desigualdad absoluta que **y**, habremos concluido esta etapa. (ii) Si **x** tiene menos desigualdad absoluta que **y** (o las curvas de Lorenz absolutas se cruzan), deberíamos comparar las curvas de Lorenz relativas de las dos distribuciones. Si **x** tiene igual o menor desigualdad relativa que **y**, esta etapa también habría concluido. (iii) Por el contrario, si **x** tiene mayor desigualdad relativa que **y** (o las curvas de Lorenz relativas se cruzan), tal vez procedería verificar si hay alguna noción de desigualdad intermedia para la cual ambas DR tienen la misma desigualdad. De esta forma sabríamos que, para nociones a la izquierda de esa noción centrista, **y** tendrá más desigualdad, mientras que para nociones a la derecha de aquella **y** tendrá menos desigualdad (o ambas DR serán no comparables).

En segundo lugar, cualquiera que sea el resultado del análisis de dominancia anterior, puede interesarnos investigar dos cuestiones cuantitativas para las que se requieren indicadores completos (a) La primera consistiría en determinar qué factores son más importantes en la explicación de la desigualdad global en ambas DR. En ese caso, podríamos recurrir al índice de entropía generalizada I_0 en el caso relativo y algún miembro de la familia de índices de Kolm I_γ^K en el caso absoluto. (b) La segunda cuestión consistiría en estimar en cuanto ha subido o disminuido la desigualdad en el paso de **x** a **y**. En una primera aproximación podrían utilizarse diversos miembros de las familias de índices que se presentaron en el apartado II.1. Si además se desea cuantificar qué parte del cambio en la desigualdad global es atribuible a cambios en la desigualdad dentro de los subgrupos de determinada partición, cambios en la desigualdad entre los mismos o cambios en el peso demográfico de los subgrupos, entonces habría que utilizar los índices relativos o absolutos descomponibles que se recomendaron en el punto anterior.

Tal vez sorprenderá a algunos que la práctica profesional no siga muy de cerca estas recomendaciones. En primer lugar, la mayoría de los trabajos publicados no incorpora el análisis de dominancia. Al parecer, interesan más los aspectos cuantitativos que requieren indicadores completos. Esta situación es claramente mejorable, pues cualquiera que sea el fin último de la investigación, si se trata de comparar dos DR **x** e **y** deberíamos de saber siempre si es o no posible hacerlo a partir del mínimo posible de juicios de valor, es decir, a través de procedimientos admisibles para todos. Posteriormente, nada impide utilizar indicadores completos que incorporen otros juicios de valor adicionales.

En segundo lugar, en contraste con los resultados de los experimentos de Amiel y Cowell (1999) donde sólo la mitad de los entrevistados adoptan una visión relativa de la desigualdad, más del 95% de la literatura empírica se refiere exclusivamente a este concepto de desigualdad. Apenas hay algunos trabajos que utilizan una noción absoluta, y solo conocemos uno que estima una noción intermedia[17]. Suele argüirse que una razón para preferir la desigualdad relativa es que la **IE** garantiza que la medición de la desigualdad es independiente de la unidad de medida en que se expresen las DR. Así, la desigualdad relativa es invariante ante cambios de pesetas a euros, ante la transformación de una distribución por medio de un único Índice de Precios de Consumo (IPC) en comparaciones

[17] Se trata de Del Río y Ruiz-Castillo (2001), aunque puede verse también el trabajo todavía sin publicar de Atkinson y Brandolini (2004).

intertemporales dentro de un mismo país, o ante la aplicación de tipos de cambio a un conjunto de países para asegurar que sus DR están expresadas en una moneda común. En cambio, como sabemos, la desigualdad absoluta no es invariante a la escala de medida: si multiplicamos una DR por una constante mayor (menor) que la unidad, la desigualdad absoluta de la DR original aumenta (disminuye). Por lo que en las comparaciones intertemporales o internacionales de desigualdad absoluta es esencial utilizar un IPC o un conjunto de tipos de cambio, respectivamente, para asegurar que la escala de las distribuciones objeto de estudio es verdaderamente comparable desde la óptica absoluta.

Es importante que estas consideraciones en torno a la escala de medida no se confundan con el difícil problema de realizar comparaciones rigurosas de desigualdad en términos reales. En el caso de las comparaciones intertemporales dentro de un mismo país, hay que reconocer que cada individuo experimenta su propia inflación en función de las proporciones al gasto que dedique a los distintos bienes. Si, por ejemplo, los precios de los bienes de primera necesidad han subido menos que los de los bienes de lujo al pasar desde $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$, entonces los individuos más pobres tendrán una tasa de inflación menor que la de los ricos. En consecuencia, la desigualdad de la distribución inicial a los nuevos precios, transformada a través de índices de precios individuales, habrá aumentado, haciendo más probable que tanto la desigualdad relativa como la absoluta en términos reales haya disminuido en el paso de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. En cambio, si se utiliza un único IPC común a todos los individuos para expresar $\mathbf{x}$ a precios de $\mathbf{y}$, es decir, si se multiplican por una constante todas las rentas individuales en $\mathbf{x}$, la desigualdad relativa no se alterará y la absoluta aumentará, con lo que la comparación ulterior con la desigualdad, relativa o absoluta, de $\mathbf{y}$ no tendrá en cuenta los efectos redistributivos del cambio diferencial en los precios de los bienes consumidos en distintas proporciones por pobres y ricos. Similarmente, el verdadero problema de las comparaciones internacionales no se refieren tanto a las diferencias en los tipos de cambio de los distintos países que afectan por igual a todos los individuos de un mismo país, sino a las diferencias en la estructura del vector de precios de cada país que afectan de forma diferente a cada individuo en función de cual sean sus proporciones al gasto en los distintos bienes[18]. Por lo demás, sorprenderá también que los trabajos que consideran el impacto redistributivo de las diferencias entre los vectores de precios de las dos situaciones que se comparan constituyen una verdadera excepción: la inmensa mayoría de los

[18] Este es el aspecto que se pretende tener en cuenta a través de la estimación de las llamadas Paridades del Poder de Compra (*Purchasing Power Parities*). Para las dificultades que entraña esta estimación en las comparaciones internacionales, véase Deaton (2001).

trabajos empíricos realizan comparaciones meramente monetarias de la desigualdad relativa de dos o más DR.

Así pues, las preferencias mayoritarias por la noción relativa de desigualdad no hay que buscarla ni en la inexistencia de resultados para otras nociones alternativas, ni en las leves ventajas prácticas del axioma **IE** frente al **IVAI**. Seguramente, el acuerdo masivo a favor de indicadores relativos refleja un juicio de valor compartido por el grueso de la profesión, al menos en torno a los años 70. La necesidad de preservar la comparabilidad de los resultados en un momento ulterior, es una buena razón para entender la inercia profesional en la dirección inicial.

IV. EL TRATAMIENTO DE ALGUNOS TIPOS DE HETEROGENEIDAD

Como se indicó en la Introducción, en el paso de la teoría a los datos reales surgen toda suerte de complicaciones. Aquí sólo podemos ocuparnos con algún detalle de las asociadas con dos fuentes de heterogeneidad muy distintas. En primer lugar, los individuos viven agrupados en hogares y tienen necesidades distintas. La renta de un individuo que vive solo y la del miembro de un hogar pluripersonal dejan de ser moralmente comparables como lo han sido hasta aquí las rentas que percibían individuos homogéneos. En segundo lugar, es preciso reconocer la heterogeneidad que encontramos entre los determinantes de la renta. Los individuos pueden tener rentas diferentes porque han realizado libremente un esfuerzo distinto, o porque han tenido distintas oportunidades en función de las circunstancias heredadas de las que no son moralmente responsables por quedar fuera de su control personal. Desde este punto de vista, las desigualdades de renta socialmente preocupantes son solamente las atribuibles a la desigualdad de oportunidades.

Pues bien, este apartado se ocupa de estas dos complicaciones de indudable interés conceptual que rompen la homogeneidad del modelo anterior y, por tanto, obligan a replantearnos la condición **S**.

IV. 1. La heterogeneidad de las necesidades en hogares con distintas características

Los individuos pueden diferir en varias características que, al generar diferencias en las necesidades, rompen la comparabilidad de las rentas individuales propia del caso homogéneo discutido en los apartados I a III. En la práctica, se suele reconocer que las necesidades de los individuos dependen del tamaño y la composición del hogar al que pertenecen. Para simplificar, supondremos que el único factor determinante es el tamaño del hogar, y nos centraremos en lo que denominaremos la *partición básica* que consiste en T subgrupos homogéneos de hogares del mismo tamaño indiciados por t = 1,…, T. Sólo las rentas de los individuos dentro de cada subgrupo son directamente comparables.

Una solución al problema de la incomparabilidad de las rentas de individuos en hogares de distinto tamaño, es contentarse con analizar por separado la desigualdad dentro de cada uno de los subgrupos de rentas moralmente comparables. Aunque este ejercicio es siempre recomendable, la limitación de esta estrategia es que, típicamente, la desigualdad no variará en la misma dirección en todos los subgrupos. Pero incluso si éste fuera el caso, lo cierto es que siempre estaremos interesados en la evaluación de la desigualdad para la población en su conjunto. Además, como en el caso homogéneo, a menudo deseamos conocer no solo si una DR tiene más desigualdad que otra, sino en qué porcentaje la primera tiene mayor desigualdad que la segunda. Para ello, hay que resolver dos problemas distintos. El primero se refiere a las comparaciones interpersonales de bienestar implícitas en la respuesta a preguntas del siguiente tipo. ¿Qué renta hay que dar al hogar de referencia consistente, por ejemplo, en un solo adulto, para que alcance el mismo bienestar de que disfruta un adulto típico en un hogar de dos personas con una renta conjunta de 6.000 euros? Alternativamente podemos preguntar, ¿cuál es el *número de adultos equivalentes* contenido en un hogar de dos miembros? La respuesta debe tener en cuenta dos tipos de consideraciones. Por un lado, cuanto mayor es el hogar, mayores son las necesidades de sus miembros. Por otro, debido a las economías de escala en el consumo, las necesidades de un hogar varían menos que proporcionalmente con su tamaño; por ejemplo, las necesidades de un hogar de dos miembros no son el doble que las de un hogar unipersonal. Así, si la respuesta al número de adultos equivalentes en un hogar de dos personas fuera 1,5, el significado es que la *renta equivalente* del hogar del ejemplo es 6.000/1,5 = 4.500 euros; es decir, cada uno de los individuos del hogar inicial tiene el mismo bienestar que un individuo que vive solo con 4.500 euros.

La forma de afrontar esta cuestión se asemeja a la que seguimos para calcular un índice de precios. En ese caso, bajo el supuesto de que los individuos tienen preferencias definidas sobre el espacio de bienes, un índice de precios se define como el cociente entre el coste de mantener un cierto nivel de bienestar a los precios del período corriente, y el coste de mantener ese mismo nivel de bienestar a los precios del período de referencia. Para expresar la renta actual a los precios de referencia no tenemos más que deflactarla (es decir, dividirla) por el índice de precios en cuestión. El interés de esta construcción es que, con datos sobre las elecciones realizadas por los individuos a lo largo del tiempo, las preferencias del individuo, los costes mencionados y el índice de precios son, en principio, recuperables con ayuda de métodos econométricos.

En el contexto que nos ocupa, el número de adultos equivalentes se concibe como un deflactor por el que hay que dividir la renta actual de un hogar cualquiera para obtener la renta que proporciona un bienestar equivalente al hogar de referencia. Comenzamos por suponer que todos los hogares tienen las mismas preferencias *incondicionales* en un espacio ampliado constituido por los bienes y el tamaño del hogar[19]. El número de adultos equivalentes de un hogar de tamaño $t > 1$ se define por el cociente entre el coste de alcanzar un cierto nivel de bienestar a los precios de referencia por parte de ese hogar, y el coste de alcanzar ese mismo nivel de bienestar a esos precios por parte del hogar unipersonal de referencia. Obsérvese que, en general, el deflactor así definido sería una función del nivel de bienestar y del vector de precios. Es decir, las economías de escala en el consumo y, por tanto, el número de adultos equivalentes de un hogar, podrían depender del nivel de renta de los hogares o de la relación entre los precios de los bienes "privados", como los alimentos, cuyo consumo por un individuo impide el consumo por parte de otros, y los precios de los bienes "públicos" del hogar, como los servicios de vivienda, electricidad o televisión que pueden consumirse simultáneamente en la misma cantidad por varios miembros del hogar. En la medida que observáramos a los individuos consumir bienes y formar hogares de distinto tamaño a lo largo del tiempo, cabría la posibilidad de recuperar econométricamente las preferencias incondicionales de los hogares, los costes mencionados y las llamadas *escalas de equivalencia* o el número de adultos equivalentes para cada tipo de hogar.

Como señalaron Pollack y Wales (1978), el problema de este enfoque es que habitualmente sólo tenemos datos sobre las elecciones que realizan los individuos en el espacio de los bienes *dados* los tamaños del hogar a los que pertenecen; es decir, no contamos con observaciones sobre las decisiones conjuntas de bienes y estructura demográfica del hogar. Con esa información sólo podemos esperar recuperar las preferencias *condicionales* en el espacio de los bienes, dados los tamaños del hogar. Las preferencias incondicionales de los hogares pueden ser transformadas ordinalmente, alterando drásticamente las escalas de equivalencia, pero sin alterar en absoluto las preferencias y las elecciones condicionales habitualmente observadas; en esas condiciones, en rigor es imposible saber si tener un tercer hijo es una bendición o una maldición.

Una consecuencia de esta situación es que los ejercicios econométricos que encontramos en la literatura identifican las preferencias incondicionales a través de hipótesis arbitrarias que, en general,

[19] El supuesto de que todos los individuos comparten unas mismas preferencias incondicionales posibilita lo que Pollack y Wales (1978) denominan comparaciones de situación (*situation comparisons*). Si hubiera varios órdenes de preferencias distintos, habría que solventar un problema de comparaciones interpersonales de bienestar (*welfare comparisons*) que los economistas no han resuelto todavía.

no son contrastables[20]. Ante este panorama, tal vez no sea de extrañar que los economistas aplicados hayan encontrado soluciones *ad hoc* a este problema. Por ejemplo, a sugerencia de Buhmann *et al.* (1988) y Coulter *et al.* (1992a, 1992b), es frecuente definir la renta equivalente de un hogar de tamaño t^h, z^h, deflactando la renta del hogar x^h por una función no lineal del tamaño del hogar:

$$z^h = x^h/(t^h)^{\theta},\ \theta \in [0, 1]. \tag{9}$$

La expresión $(t^h)^{\theta}$ representa el número de adultos equivalentes. Cuando $\theta = 1$, el número de adultos equivalentes coincide con el tamaño del hogar y la renta equivalente se convierte en la renta *per capita* bajo el supuesto de que no hay economías de escala en el consumo, mientras que cuando $\theta = 0$ la renta inicial no se ajusta en absoluto bajo el supuesto de que las economías de escala son infinitas. Una opción popular es tomar $\theta = ½$. Este modelo permite estudiar la robustez de los resultados ante distintos supuestos sobre el parámetro θ.

El uso de unas u otras escalas de equivalencia conduce al restablecimiento de la propiedad **S**: la renta equivalente de los hogares es ahora directamente comparable y desaparece la preocupación por el tipo de hogar en que vive cada individuo. Obsérvese, sin embargo, que la escala de equivalencia introducida en la expresión (9) –tan utilizada en los trabajos recientes–, es independiente tanto del nivel de renta como del vector de precios que el hogar confronta. La diferencia entre el pragmatismo al uso en la investigación aplicada y la riqueza de la teoría inicial es un buen indicador de la dificultad para resolver satisfactoriamente un problema tan básico como la heterogeneidad de los individuos que viven en hogares de distintas características demográficas.

Una vez expresada la renta de cada hogar en euros equivalentes del hogar de referencia, el segundo problema es determinar cómo ponderamos las rentas de los hogares resultantes. ¿Debemos ponderar por igual todos los hogares, o debemos ponderar cada uno por su tamaño o por el número de adultos equivalentes? Desde el punto de vista normativo, el concepto primario es el bienestar individual. Por consiguiente, la solución que suele darse en la práctica a este segundo problema es ponderar la renta equivalente del hogar por el tamaño del mismo. Si en el ejemplo anterior se considera que un hogar de dos miembros con 6.000 euros tiene 1,5 adultos equivalentes -de manera que su bienestar es equivalente al de un hogar unipersonal de referencia con 4.500 euros- lo que se hace es sustituir la renta inicial de 6.000 euros por la renta equivalente de 4.500 y ponderar esta renta por 2, es decir, asignar 4.500 euros a cada uno de los dos individuos del hogar original.

[20] Para averiguar qué parte de las escalas de equivalencia son recuperables con la información habitual, véase Blundel y Lewbel (1991); y para una revisión en profundidad de este tema, véase Lewbel (1997).

Así pues, en la investigación aplicada vigente, una vez adoptado un criterio para construir la renta equivalente de cualquier hogar y la ponderación razonable que debe asignársele, se aplican a la DR resultante los métodos discutidos en el resto del trabajo. Sin embargo, en un trabajo reciente Ebert y Moyes (2003) han estudiado teóricamente las implicaciones que se deducen sobre el procedimiento de ajuste de las rentas originales cuando se aceptan dos hipótesis: que el procedimiento debe ser invariante ante distintas elecciones de la composición del hogar de referencia y que debe respetar la extensión del **PT** a este contexto. El resultado es que la escala de equivalencia debe ser independiente de la renta del hogar y que las ponderaciones de la renta equivalente deben elegirse proporcionales al número de adultos equivalente en lugar de al tamaño del hogar.

Para concluir, debe ponerse de manifiesto que los procedimientos teóricos anteriores para tener en cuenta las diferencias en las necesidades postulan la existencia de preferencias del hogar, sin referencia alguna al problema de agregación de las preferencias de los adultos que integran los hogares pluripersonales; es decir, adoptan lo que se conoce como el enfoque "unitario" al comportamiento del hogar. En el contexto del llamado enfoque "colectivo" (para una revisión véase Vermuelen, 2002), se ha sugerido la idea de soslayar las comparaciones interpersonales de bienestar entre hogares e intentar construir escalas de equivalencia basadas en las comparaciones de niveles de bienestar alcanzados por el *mismo* individuo cuando vive solo o en compañía de un cónyuge (Lewbel, 2004). Alternativamente, en un modelo colectivo del hogar que consta de dos adultos con preferencias distintas y uno o más menores tratados como bienes públicos, Bourguignon (1999) investiga bajo qué condiciones es posible recuperar información sobre la asignación de recursos en el seno del hogar entre adultos y menores a partir de la información sobre el consumo de bienes agregado y los ingresos relativos de los padres. Las estimaciones resultantes sobre el "coste de los niños" podrían utilizarse en la construcción de escalas de equivalencia para hogares de distinto tamaño y composición. Es pronto para saber si estos enfoques novedosos nos proporcionarán soluciones empíricamente viables para la evaluación de las necesidades diferenciales de los hogares.

IV. 2. La desigualdad de renta atribuible a la desigualdad de oportunidades

Supongamos que se ha decidido socialmente qué determinantes de la renta de los individuos, por estar fuera de su control, deben incluirse bajo el término *circunstancias*. Como se indicó en la Introducción, se trata típicamente de variables como el sexo, la etnia y otras características genéticas, la suerte o la condición socioeconómica de los padres. Sea K el número de circunstancias que se consideran y sea $c^g \in R_+^K$ el vector de las mismas que nos permite clasificar a cada individuo en G tipos, indiciados por g = 1,…, G, en función de sus circunstancias. De acuerdo con Roemer (1998), la renta que el individuo *i* obtiene, x_i, depende de dos factores: sus circunstancias, digamos c^g, y el *esfuerzo* que el individuo decide ejercer libremente en el trabajo, e_i. El esfuerzo es una variable unidimensional que se supone que es inobservable y cuya distribución depende del tipo, es decir, de las circunstancias del individuo. Por último, la dependencia de la renta respecto de las circunstancias y el esfuerzo se modela a través de una función independiente del tipo, $f{:}R_+^{K+1} \rightarrow R$; esto es:

$$x_i = f(c^g, e_i), \tag{10}$$

donde f depende positivamente del esfuerzo.

Si hubiera un solo tipo, las diferencias de renta se explicarían exclusivamente por las circunstancias sin lugar alguno para la responsabilidad individual. Si hubiera tantos tipos como individuos se negaría el impacto de las circunstancias y las diferencias de renta se deberían solo a las diferencias en el esfuerzo que cada cual ejerce. En el caso intermedio con G tipos, consideremos dos individuos *i* y *j* con circunstancias c^g y $c^{g'}$ y distribución de esfuerzos E_g y $E_{g'}$, respectivamente. Supongamos que los individuos *i* y *j* eligen responsablemente los niveles de esfuerzo, $e_i \in E_g$ y $e_j \in E_{g'}$ de forma que $x_i = f(c^g, e_i)$ y $x_j = f(c^g, e_j)$. Las diferencias entre x_i y x_j se deben a que los individuos tienen distintas circunstancias y distinto nivel de esfuerzo. Roemer postula que socialmente sólo son preocupantes las desigualdades de renta atribuibles a distintas circunstancias. Pero en la medida que las distribuciones de esfuerzo dependen del tipo al que uno pertenece, los niveles absolutos de esfuerzo e_i y e_j no son directamente comparables porque no están enteramente bajo el control de los individuos. En particular, el hecho de que $e_i > e_j$ puede no ser debido a la mayor responsabilidad que ejerce el individuo *i*, sino una consecuencia de las diferentes características de las distribuciones de esfuerzos E_g y $E_{g'}$; pudiera ser que los individuos del tipo *g* están más dispuestos a ejercer esfuerzos que los de tipo *g'*, de manera que la media de la distribución E_g es superior a la de la distribución $E_{g'}$. Por consiguiente, las rentas x_i y x_j no son directamente comparables.

La solución propuesta por Roemer para comparar las rentas de individuos pertenecientes a tipos diferentes depende de la relación funcional entre las dos variables unidimensionales *x* y *e* dentro de cada tipo. Dadas las circunstancias, clasifiquemos los individuos del tipo de que se trate en los cuantiles de la variable *e*, por ejemplo en las decilas. Como a mayor *e* le corresponde mayor *x* de acuerdo con la ecuación (10), las decilas de individuos de acuerdo con el esfuerzo, que son inobservables, se corresponden exactamente con las decilas de individuos de acuerdo con la renta, que es una variable observable. Si aceptamos la Teoría Pragmática de la Responsabilidad de Roemer según la cual *los individuos de tipos distintos que pertenecen a la misma decila han ejercido el mismo grado de responsabilidad*, entonces sus rentas resultan moralmente comparables.

Roemer usa esta hipótesis para diseñar políticas que persiguen la igualdad de oportunidades en el sentido de paliar al máximo las diferencias de renta entre individuos en la misma decila de esfuerzo/renta, es decir, paliar al máximo las diferencias de renta debidas exclusivamente a las diferencias en las circunstancias.

En lo que se refiere a la comparación de DR desde la óptica de la desigualdad, como es habitual debemos de distinguir entre dos enfoques. En primer lugar, Peragine (2004) formula un conjunto de axiomas que una FBS debe satisfacer para capturar la idea de que las únicas diferencias socialmente preocupantes son las debidas a que los individuos que han ejercido un grado similar de esfuerzo tienen distintas circunstancias. En un segundo paso, Peragine demuestra que la ordenación unánime de DR por parte de todas las FBS de esa clase coincide con la ordenación que se alcanza comparando las curvas de Lorenz generalizadas, que no son más que las curvas de Lorenz relativas que se presentaron en el apartado I. 1 multiplicadas por la media de la distribución. Como es de esperar, la estrategia de la dominancia no proporciona una ordenación completa de todas las DR y no permite cuantificar las diferencias en la desigualdad de cada par de DR.

En segundo lugar, para solventar estas limitaciones Ruiz-Castillo (2003) muestra que que la desigualdad de oportunidades en el espacio de las DR atribuible a las distintas circunstancias puede interpretarse como la desigualdad entre los subgrupos de una determinada partición; por tanto, el instrumento adecuado para su medición es un ID descomponible. Utilizando el índice I_0 de entropía generalizada, se demuestra que la desigualdad global de una DR puede expresarse en términos de tres factores que capturan (i) la desigualdad dentro de cada subgrupo en la doble partición por tipo y decil de esfuerzo, ponderada por la importancia demográfica del subgrupo en cuestión; (ii) la desigualdad atribuible a los distintos grados de esfuerzo ejercidos por los individuos de distintos tipos, y (iii) la desigualdad de oportunidades debida a distintas circunstancias.

V. CONCLUSIONES

En este trabajo se han revisado los fundamentos de un ejercicio eminentemente empírico como es la medición de la desigualdad de una variable unidimensional que denominamos renta. Los tres primeros apartados se han dedicado al caso homogéneo en que todos los individuos tienen los mismos derechos *a priori* sobre la renta total. Se ha comprobado que –ni siquiera en este ámbito tan limitado–, la desigualdad no es un concepto primario. Por el contrario, depende de un conjunto de propiedades que ha sido útil organizar en dos grupos.

En primer lugar, puede decirse que la literatura económica sobre la medición de la desigualdad de la renta es un estudio de las consecuencias del **PT** (y del **PP** que proporciona una solución operativa al problema de comparar dos DR de distinto tamaño). La crítica de este axioma revela su carácter local, su falta de interés por la interdependencia entre las rentas individuales desde una perspectiva más global, así como su desatención sobre el tamaño de grupos de individuos con rentas similares o iguales. Junto con la simetría (**S**) propia del caso homogéneo, estas propiedades se combinan con diversos axiomas sobre cómo se comporta la desigualdad cuando variamos simultáneamente todas las rentas; en los casos polares se supone que la desigualdad se mantiene constante ante cambios equiproporcionales (**IE**) o ante variaciones absolutas de la misma magnitud (**IVAI**). Estas son las propiedades básicas que sustentan una ordenación unánime o admisible, aunque parcial, de las DR. La ordenación puede llevarse a la práctica a través de la comparación de las curvas de Lorenz, relativa o absoluta, de las DR.

En segundo lugar, para la ordenación completa de las DR y la cuantificación de las diferencias de la desigualdad que exhiban, pueden utilizarse una serie de familias de ID cuyos miembros capturan diferentes percepciones de la aversión a la desigualdad. Si además deseamos expresar la desigualdad global en términos de la desigualdad dentro y entre los subgrupos de cualquier partición o si, simplemente, deseamos asegurar cierta consistencia entre la desigualdad dentro de los subgrupos y la desigualdad global, entonces en el caso relativo estamos abocados a la familia de ID de entropía generalizada, entre los cuales destaca el índice I_0, y en el caso absoluto debemos optar por la familia de índices de Kolm. Las condiciones de descomponibilidad ante cualquier partición conducen inexorablemente a indicadores caracterizados por un grado muy fuerte de separabilidad aditiva que no deja lugar a la interacción entre las rentas individuales.

En el cuarto apartado del trabajo se han revisado brevemente dos complicaciones conceptuales importantes que rompen la homogeneidad de los individuos del modelo anterior. La primera es la que plantea el hecho de que los individuos con características distintas pueden tener necesidades distintas que hacen sus rentas directamente incomparables. Este es el caso de las diferencias en las necesidades de los individuos que viven en hogares de distinto tamaño y composición. Aunque existen planteamientos teóricos atractivos para abordar este problema, en la investigación aplicada se utilizan hasta el momento procedimientos de ajuste sustentados en consideraciones pragmáticas. La segunda fuente de heterogeneidad surge cuando, dentro de las diferencias de renta, distinguimos entre las debidas al esfuerzo individual y las causadas por las diferencias en las circunstancias fuera del control de los individuos. Al menos en el caso especial del modelo de Roemer (1998), encontramos que esa distinción puede establecerse empíricamente con ayuda de los enfoques habituales.

En un volumen clásico sobre Economía del Bienestar publicado un año antes de la eclosión de la literatura moderna sobre la medición de la desigualdad de la renta, Arrow y Scitovsky (1969) declaran que "una de las mayores contribuciones de esa disciplina ha sido proporcionar un marco riguroso para lo que parecía demasiado vago e inaprensible y crear un sistema de medida para lo que se creía imposible de medir". El trabajo aquí descrito sobre la medición de la desigualdad ilustra claramente este tipo de contribución. Puede decirse que desde la estadística descriptiva que se empleaba antes de 1970 para estimar la dispersión de la renta hasta la evaluación normativa actual, axiomáticamente fundamentada, se ha recorrido un largo trecho.

Un trabajo de carácter general sobre la medición de la desigualdad no puede concluirse sin referencia a las enormes dificultades que los investigadores encuentran en relación a la información empírica disponible. Afortunadamente, desde 1970 se ha dispuesto en la mayoría de los países del mundo de información microeconómica sobre los niveles de vida de los hogares a través de las llamadas Encuestas de Presupuestos Familiares. Aparte del descubrimiento de que los individuos de la teoría viven en hogares en la realidad, hay que citar al menos dos tipos de problemas ligados a los datos. El primero se refiere a la variable que mejor representa el bienestar económico del hogar o la renta de la teoría, donde los candidatos naturales son los ingresos o el gasto. Ambos plantean problemas de medición muy serios sobre los que no podemos entrar aquí (véase, por ejemplo, el aparatdo 4 de Atkinson y Bourguignon, 2000).[21] El segundo tipo de problemas tiene que ver con los aspectos estadísticos de toda aplicación empírica. Destacaremos dos cuestiones. Primero, la necesidad de utilizar procedimientos rigurosos de contraste de hipótesis para averiguar si una curva de Lorenz domina a otra, se cruzan, o son estadísticamente equivalentes (Bishop y Formby, 1999, Davidson y Duclos, 2000), o si la diferencia entre los valores que toma un ID para dos DR es estadísticamente significativa (Cowel, 1989, Mills y Zandvakili, 1997). Segundo, la necesidad de protegernos ante la falta de robustez de los procedimientos de estimación de la desigualdad frente observaciones anómalas (Cowell y Victoria-Feser, 1996).

[21] Habrá que mencionar también la importancia de confrontar la medición de la desigualdad de la riqueza, donde encontramos problemas conceptuales nuevos y mayores limitaciones de información que en el caso del ingreso o el gasto (véase Davies y Shorrocks, 2000).

El trabajo se ha limitado a la medición de la desigualdad, sin entrar en cuestiones sustantivas que desencadenan sub-literaturas propias, como sean la explicación de la desigualdad existente (Atkinson, 1997, Li *et al.*, 1998, Bènabou (2000), Atkinson y Bourguignon, 2000, Neal y Rosen, 2000), la conexión entre desigualdad y crecimiento (Bertola, 2000) o entre desigualdad y desarrollo (Kambur, 2000).

Pero desde la óptica de la medición, tal vez la limitación más seria de la revisión realizada es su carácter estático. Desde el punto de vista intertemporal, nos hemos concentrado en la teoría de la medición de la desigualdad con datos provenientes de muestras independientes en dos momentos del tiempo. Pero si en un país la desigualdad aumenta, ¿qué sabemos sobre si la razón es que los ricos y los pobres de hoy lo son más aún que los de ayer, o es que los ricos se han empobrecido y los pobres han experimentado un fuerte avance? Este tipo de pregunta solo puede abordarse empíricamente con información sobre la renta de una muestra permanente de individuos, es decir con información longitudinal de tipo panel. Como ponen de manifiesto Fields y Ok (1999), el problema principal de lo que se conoce como la teoría de la movilidad de la renta es que no se ha alcanzado el grado de acuerdo profesional del que se ha dado cuenta en este trabajo en un contexto estático. Por lo demás, en un marco explícitamente intertemporal habría que revisar el debate sobre si utilizar los ingresos o los gastos como indicador del bienestar del hogar (véase Blundell y Preston, 1998 y Blundell *et al.*, 2005).

En este trabajo se ha seguido un enfoque positivo donde se han evitado los aspectos normativos más profundos. En particular, se ha discutido el problema de la medición de la desigualdad como si fuera posible hacerlo sin confrontar qué queremos decir cuando afirmamos que una distribución es "justa" o "equitativa", y cual es el espacio –típicamente multidimensional– donde debe plantearse la noción misma de igualdad en respuesta a la pregunta de Sen (1980) "¿Igualdad de qué?" (*Equality of What?*). El tratamiento de estas cuestiones necesita un trabajo independiente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arrow, K. y T. Scitovsky (eds) (1969), *Readings in Welfare Economics*, Homewood, Illinois: Richard D. Irwin.

Atkinson, A. B. (1970), "On the Mesurement of Inequality", *Journal of Economic Theory*, **2**: 224-263.

Atkinson, A. B. (1997), "Bringing Income Distribution In from the Cold", *Economic Journal*, **107**: 297-321.

Atkinson, A.B. y F. Bourguignon (2000), "Income Distribution and Economics", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Ámsterdam: Elsevier.

Atkinson, A. B. y A. Brandolini (2004), "Global Inequality and Poverty: Absolute, Relative or Intermediate ", 28th General Conference of the IARIW, Cork, Ireland.

Bertola, G. (2000), "Macroeconomics of Distribution and Growth", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Ámsterdam: Elsevier.

Bishop, J. A. y J. P. Formby (1999), "Tests of Significance for Lorenz Partial Orders", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Blackorby, C. y D. Donaldson (1980), "A Theoretical Treatment of Indices of Absolute Inequality", *Internacional Economic Review*, **21**: 107-136.

Blackorby, C., D. Donaldson y M. Auersperg (1981), "A New Procedure for trhe Measurement of Inequality Within and Among Population Subgroups", *Canadian Journal of Economics*, **XIV**: 665 - 685.

Blackorby, C., W. Bossert y D. Donaldson (1999), "Income Inequality Measurement: The Normative Approach", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Blundell, R. y A. Lewbel (1990), "The Information Content of Equivalente Scales", *Journal of Econometrics*, **50**: 49-68.

Blundell, R. y I. Preston (1998), "Consumption Inequality and Income Uncertainty", *Quaterly Journal of Economics*, **113**: 603-640.

Blundell, R., L. Pistaferri y I. Preston, "Consumption Inequality and Partial Insurance", mimeo, 2005.

Bourguignon, F. (1979), "Decomposable Income Inequality Measures", *Econometrica*, **47**: 901-920.

Bourguignon, F. (1999), "The Costo f Children: May the Collective Approach to Household Behavior Help?", *Journal of Population Economics*, **12**: 503-521.

Buhmann, B., L. Rainwater, G. Schmaus y T. Smeeding (1988), "Equivalence Scales, Well-Being, Inequality and Poverty: Sensitivity Estimates Across Ten Countries Using the Luxembourg Income

Study Database", *Review of Income and Wealth*, **34**: 115-142.

Chakravarty, S. R. y A. Tyagarupananda (1998), "Subgroup Decomposable Absolute Indices of Inequality", en S. R. Chakravarty, D. Coondoo y R. Mukherjee (eds), *Quantitative Economics: Theory and Practice, Essays in Honour of Profesor N. Bhattacharya*, New Delhi: AllIEd Publishers.

Coulter, F., F. Cowell y S. Jenkins (1992a), "Differences in Needs and Assessment of Income Distributions", *Bulletin of Economic Research*, **44**: 77-124.

Coulter, F., F. Cowell y S. Jenkins (1992b), "Equivalence Scale Relativities and the Extent of Inequality and Poverty", *Economic Journal*, **102**: 1067-1082.

Cowell, F. A. (1980), "On the Structure of Additive Inequality Measures", *Review of Economic Studies*, **47**: 521-531.

Cowell, F. A. (1995), *Measuring Inequality*, segunda edición, Londres: Prentice Hall, Harverster Wheatsheaf.

Cowell, F. A. (1989), "Sampling Variante and Decomposable Inequality Measures", *Journal of Econometrics*, **42**: 27-41.

Cowell, F. A. y M. P. Victoria-Feser (1996), "Robustness Properties of Inequality Measures", *Econometrica*, **64**: 77-101.

Dalton, H. (1920), "The Measurement of Inequality of Incomes," *Economic Journal*, **30**: 348-361.

Davidson, R. y J.-Y. Duclos (2000). "Statistical Inference for Stochastic Dominance and for the Measurement of Poverty and Inequality," *Econometrica*, **68**: 1435-1464.

Davies, J. y M. Hoy (1995), "Making Inequality Comparisons when Lorenz Curves Intersect", *American Ecvonomic Review*, **85**: 980-986.

Davies, J. B. y A. F. Shorrocks (2000), "The Distribution of Wealth", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Ámsterdam: Elsevier.

Del Río, C. y J. Ruiz-Castillo (2001), "Welfare and Intermediate Inequality. The Case of Spain in 1980-81 and 1990-91", *Review of Income and Wealth*, series **47**: 221-238.

Deaton, A. (2001), Counting the World's Poor: Problems and Possible Solutions, *The World Bank Research Observer*, **16**: 125-147.

Deutsch, J. y J. Silber (1999), "Inequality Decomposition By Population Subgroups and the Analysis of Interdistributional Inequality", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Donaldson, D. y J. Weymark (1980), "A Single-parameter Generalization of the Gini indices of Inequality", *Journal of Economic Theory*, **41**: 23-33.

Dutta, B. y J.M. Esteban (1992), "Social Welfare and Equality", *Social Choice and Welfare*, **9**: 267-276.

Ebert, U. y P. Moyes (2003), "Equivalente Scales Reconsidered", *Econometrica*, **71**: 319-343.

Esteban, J.M. y D. Ray (1994), "On the Measurement of Polarization", *Econometrica*, **62**: 819-851.

Fields, G. y E. Ok (1999), "The Measurement of Income Mobility", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Foster, J. E. (1985), "Inequality Measurement", en H. P. Young (ed), *Fair Allocation*, American Mathematical Society Proceedings of Applied Mathematics, Volumen 33.

Foster, J. E. y A. Sen (1997), "On Economic Inequality Alter a Quarter Century", en A. Sen, *On Economic Inequality*, segunda edición, Oxford: Oxford University Press.

Gini, C. (1912), *Variabilità e mutabilità,* Bologna.

Gini, C. (1936), *On the Measure of Concentration with Special Referente to Income and Wealth,* Cowles Commission.

Gottschalk, P. y T. Smeeding (1997), "Crossnational Comparisons of Earnings and Income Distribution", *Journal of Economic Literature*, **XXXV**: 633-686.

Gottschalk, P. y T. Smeeding (2000), "Empirical Evidence on Income Inequality in Industrial Countries", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Amsterdam: Elsevier.

Hardy, G.H., J. E. Littlewood y G. Poyla (1934), *Inequalities*, Cambridge: Cambridge University Press.

Kanbur, R. (2000), "Income Distribution and Development", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Ámsterdam: Elsevier.

Kolm, S.-Ch. (1966), "The Optimal Production of Social Justice", en *Proceedings of the Internacional Economic Association Conference on Public Economics*, Biarritz, y en H. Guitton y J. Margolis (eds.), *Public Economics*, Londres: Macmillan, 1969, 145-200.

Kolm, S.-Ch. (1976a), "Unequal Inequalities I", *Journal of Economic Theory*, **12**: 416-442.

Kolm, S.-Ch. (1976b), "Unequal Inequalities II", *Journal of Economic Theory*, **13**: 82-111.

Kolm, S.-Ch. (1999), "The Rational Foundations of Income Inequality Measurement", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Lewbel, A. (1997), "Consumer Demand Systems and Household Equivalente Scales", en M. Pesaran y P. Schmidt (eds.), *Handbook of Applied Econometrics.* Microeconomics, Londres: Blackwell Publishers.

Lewbel, A. (2004), "Equivalente Scales Based on Collective Household Models", en C. Dagum y G. Ferrari (eds), *Household Behavior, Equivalente Scales, Welfare and Poverty*, Heidelberg: Physica-Verlag.

Milanovic, B. (2002), "The World Income Distribution, 1988 and 1993: First calculation Base don Household Surveys Alone", *The Economic Journal*, **112**: 51-92.

Milanovic, B. y S. Yitzhaki (2002), "Decomposing World Income Distribution: Does the World Have a Middle Class?", *Review of Income and Wealth*, **48**: 155-178.

Mills, J. A. y S. Zandvakili (1997), "Statistical Inference via Bootstrapping for Measures of Inequality", *Journal of Applied Econometrics*, **12**: 133-150.

Moyes, P. (1999), "Stochastic Dominante and the Lorenz Curve", en J. Silber (ed), *Handbook of Income Inequality Measurement*, Londres: Kluwer Academic Publishers.

Neal, D y S. Rosen (2000), "Theorie of the Distribution of Earnings", en A. B. Atkinson y F. Bourguignon (eds), *Handbook of Income Distribution, Volume I*, Ámsterdam: Elsevier.

Peragine, V. (2004), "Ranking of Income Distributions According to Inequality of Opportunities", ", *Journal of Economic Inequality*, **2**: 11-30.

Pigou, A. (1912), *Wealth and Welfare*, Londres: Macmillan.

Pollak, R. y T. Wales (1978), "Welfare Comparisons and Equivalent Scales", *American Economic Review*, **69**: 216-221.

Roemer, J. (1998), *Equality of Opportunity*, Cambridge: Harvard University Press.

Ruiz-Castillo, J. (2003), "The Measurement of Inequality of Opportunities", en J. Bishop y Y. Amiel (eds.), *Research in Economic Inequality,* **9**: 1-34.

Sen, A. (1973), *On Economic Inequality*, Londres: Oxford University Press.

Sen, A. (1980), "Equality of What?", en S. MMcMurrin (ed.), *Tanner lectures on Human Values*, Cambridge: Cambridge University Press.

Shorrocks, A.F. (1980), "The Class of Additively Deconmposable Inequality Measures", *Econometrica*, **48**: 613-625.

Shorrocks, A.F. (1988), "Aggregation Issues in Inequality Measurement", en W. Eichhorn (ed), *Measurement in Economics*, Heidelberg: Physica Verlag.

Shorrocks, A.F. y J. Foster (1987), "Transfer-sensitive Inequality Measures", *Review of Economic Studies*, **54**: 485-498.

Theil, H. (1967), *Economics and Information Theory*, Amsterdam: North Holland.

Vermeulen, F. (2002), "Collective households: Principles and main results", *Journal of Economic Surveys*, **16**: 533-564.

Wolfson, M. (1994), "Conceptual Issues in Inequality Measures -When Inequalities Diverge", *American Economic Review*, **84**: 353-358.